Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 5

27. Oktober 2009

Kapitel 1. Mengen, Abbildungen und Funktionen

§1.6 Die komplexe Zahlen (Fortsetzung)

Wir verlangen, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat und nennen diese i, also $i \notin \mathbb{R}$.

Die Menge der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Rechenregeln:

- **Addition:**

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$
$$\Rightarrow \quad z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2);$$

- **Multiplikation:**

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$
$$\Rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1);$$

- **Gleichheit:**

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$$
$$\Rightarrow \quad z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ und } b_1 = b_2.$$

Definition 24.

Für $z = a + ib$ schreiben wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} z &:= a \qquad (\textit{Realteil von } z) \\ \mathrm{Im} z &:= b \qquad (\textit{Imaginärteil von } z) \end{aligned}$$

und nennen

$$\overline{z} := a - ib$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Die Elemente der Menge $\mathbb{C}$ stellen Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Ein Koordinatensystem in der Gaußschen Zahlenebene ist durch eine reelle und eine imaginäre Achse gegeben.

Definition 25.

(Absoluter) Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + ib$ heißt der Abstand des diese Zahl darstellenden Punktes in der Gaußschen Zahlenebene vom Koordinatenursprung, d.h.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} =: r$$

Bezeichnet man den Winkel, den die Strecke $\overline{Oz}$ mit der positiven Richtung der reellen Achse einschließt, mit

$$\varphi := \arg z$$

φ heißt (ein) Argument von z.

Bemerkung.

Für $a = b = 0$, d.h. $z = 0 + i0$ ist $r = 0$ und $\arg z$ unbestimmt.

Die Zahl $z = 0 + i0$ ist die einzige komplexe Zahl mit unbestimmten Argument.

Für $z \neq 0 + i0$ besitzt $\arg z$ unendlich viele Werte.

Der Wert von $\arg z$, für den $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, heißt Hauptwert von $\arg z$.

Alle übrigen Werte gehen aus dem Hauptwert durch Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hervor.

Mit $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arg z$ gilt

$$a = r\cos(\varphi), \qquad b = r\sin(\varphi),$$

$$\begin{aligned}
\tan(\varphi) &= \frac{b}{a}, && \text{falls} \quad a \neq 0, \\
\varphi &= \frac{\pi}{2}, && \text{falls} \quad a = 0 \quad \text{und} \quad b > 0, \\
\varphi &= \frac{3\pi}{2}, && \text{falls} \quad a = 0 \quad \text{und} \quad b < 0.
\end{aligned}$$

Man nennt (r, φ) auch die Polarkoordinaten eines Punktes z in der Ebene.

Fölglich erhält man aus der **algebraischen Darstellung**

$$z = a + ib$$

einer komplexen Zahl mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$

$$z = a + ib = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$

die **trigonometrische Darstellung** einer komplexen Zahl.

Mit Hilfe der Eulerschen Formeln

$$e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$$

erhält man aus der trigonometrischen Darstellung einer komplexen Zahl $z \neq 0 + i0$

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

die **Exponentialdarstellung** einer komplexen Zahl.

Multiplikation:

(A) Zwei komplexe Zahlen in algebraischer Darstellung werden multipliziert, indem man die Faktoren gliedweise ausmultipliziert.

(T) Zwei komplexe Zahlen in trigonometrischer Darstellung werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

(E) Zwei komplexe Zahlen in Exponentialdarstellung werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Division:

(A) Zwei komplexe Zahlen in algebraischer Darstellung werden dividiert, indem man den Quotienten mit dem zum Divisor konjugiert komplexen Zahl erweitert (Reellmachen des Nenners) und die erhaltenen Faktoren im Zähler ausmultipliziert.

(T) Zwei komplexe Zahlen in trigonometrischer Darstellung werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.

(E) Zwei komplexe Zahlen in Exponentialdarstellung werden dividiert, indem man die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.