Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 6

3. November 2009

Kapitel 1. Mengen, Abbildungen und Funktionen

§1.6 Die komplexe Zahlen (Fortsetzung)

Weitere Rechenoperationen über $\mathbb{C}$

- **Potenzieren:** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$$z^0 := 1, \qquad z^n := z^{n-1} \cdot z.$$

(A) $$z = a + ib \quad \Rightarrow \quad z^n = (a+ib)^n.$$

(T) $$z^n = \Big[r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \Big]^n = r^n \Big[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \Big].$$

(E) $$z^n = \Big[re^{i\varphi} \Big]^n = r^n e^{in\varphi}.$$

- **Radizieren:** (nur in trigonometrischer Darstellung und Exponentialdarstellung möglich).

  In $\mathbb{R}$ gilt: Für jedes $\beta \geqslant 0$ und jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ existiert genau eine reelle Zahl $\alpha \geqslant 0$, so dass

  $$\alpha^n = \beta$$

  gilt.

  In $\mathbb{C}$ gilt: Für jedes $z \neq 0 + i0$ und jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ existieren stets n verschiedene komplexe Zahlen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, so dass

  $$\omega_k^n = z \qquad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

  gilt.

Berechnungsformeln für die n komplexen Wurzeln

(T) $$z = r\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)),$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(E) $$z = re^{i\varphi},$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Bemerkung.

Der Wert für $k = 0$ heißt Hauptwert von $\sqrt[n]{z}$, falls $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ gilt.

- **Logarithmieren:** (nur in Exponentialdarstellung möglich).

$$\ln(z) = \ln\left(re^{i(\varphi+2k\pi)}\right) = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Der Logarithmus einer komplexen Zahl besitzt unendlich viele Werte.

Der Wert für $k = 0$ heißt Hauptwert von $\ln(z)$, falls $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ist.

Definition 26.

Ein (komplexe) Polynom ist eine Funktion

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

der Gestalt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$ *und* $a_n \neq 0 + 0i$.

Die ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ *heißt Grad des Polynoms.*

Bezeichnung: $\quad n = grad(p)$.

Bemerkung.

Die Polynome vom Grad 0 sind die konstanten

$$p_0(z) = a_0.$$

Satz 2.

Jedes (komplexe) Polynom n-tes Grades ($n \in \mathbb{N}$) hat eine (komplexe) Nullstelle.

Bemerkung.

$$p_n(z) = a_n z^z + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 + 0i,$$
$$a_n \neq 0 + 0i,$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{a_n} p_n(z) = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} = 0 + 0i.$$

O.B. $$p_n(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 + 0i. \quad (1.6.1)$$

Ist nun z_1 Nullstelle von p_n, so gilt

$$p_n(z) = (z - z_1)p_{n-1}(z),$$

wobei p_{n-1} ein Polynom der Form (1.6.1) vom Grad $n - 1$ ist.

Falls $n - 1 > 0$, d.h. $n - 1 \in \mathbb{N}$, können wir den Satz 2 auf p_{n-1} anwenden und erhalten eine weitere Nullstelle z_2.

Induktiv fortfahren liefert das

Korollar.

Jedes komplexe Polynom p_n n-ten Grades ($n \in \mathbb{N}$) der Form (1.6.1) lässt sich als Produkt von n Linearfaktoren schreiben.

Es gibt also Nullstellen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms:

Allgemein bietet sich folgender Lösungsweg für die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0 + 0i$$

vom Grad *n* an:

$\boxed{1.}$ Betr.

$$\tilde{p}_n(z) = \frac{1}{a_n} p_n(z) = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n}.$$

$\boxed{2.}$ Man versucht, durch Probieren und (oder) Erraten eine Nullstelle z_1 des Polynoms $\tilde{p}_n(z)$ zu bestimmen.

Ist dieses Vorhaben gelungen, so gilt

$$\tilde{p}_n(z) = (z - z_1)\tilde{p}_{n-1}(z).$$

$\boxed{3.}$ Man wiederholt das Verfahren für das Polynom $\tilde{p}_{n-1}(z)$ vom Grad $(n-1)$.

$\boxed{4.}$ Man bricht das Verfahren i.a. dann ab, wenn das Restpolynom vom Grad 2 ist und bestimmt die restlichen zwei Nullstellen nach den üblichen Lösungsmethoden für quadratische Gleichungen.