Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 7

6. November 2009

Kapitel 1. Mengen, Abbildungen und Funktionen

§1.6 Die komplexe Zahlen (Fortsetzung)

Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms:

Allgemein bietet sich folgender Lösungsweg für die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0 + 0i$$

vom Grad n an:

1. Betr.

$$\tilde{p}_n(z) = \frac{1}{a_n} p_n(z) = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n}.$$

2. Man versucht, durch Probieren und (oder) Erraten eine Nullstelle z_1 des Polynoms $\tilde{p}_n(z)$ zu bestimmen.
   Ist dieses Vorhaben gelungen, so gilt

$$\tilde{p}_n(z) = (z - z_1)\tilde{p}_{n-1}(z).$$

3. Man wiederholt das Verfahren für das Polynom $\tilde{p}_{n-1}(z)$ vom Grad $(n-1)$.

4. Man bricht das Verfahren i.a. dann ab, wenn das Restpolynom vom Grad 2 ist und bestimmt die restlichen zwei Nullstellen nach den üblichen Lösungsmethoden für quadratische Gleichungen.

Bemerkung.

Im Fall $n \geqslant 0$ gibt es keine allgemeine Formel für die Nullstellen, wie z.B. für $n = 2$ die Formel von Vieta.

§1.7 Summen- und Produktzeichen

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so schreibt man für die Summe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

kürzer

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Für große n (z.B. 1000000) hat man gar keine andere Möglichkeit.

Man nennt k den Summationsindex.

Die Summanden a_k können dabei beliebige Ausdrücke sein, die irgendwie von k abhängen.

Im Fall von $\sum_{k=1}^{n} a_k$ nennt man

$$I = \{k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

die Indexmenge.

Natürlich kann die Indexmenge eine beliebige Teilmenge (von $\mathbb{Z}$) sein.

Man kann den Summationsindex umbenennen; so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{n} a_l \sum_{t=1}^{n} a_t.$$

Die Summanden können unabhängig vom Summationsindex, d.h. konstant, sein:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a, \qquad \text{so ist}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = n \cdot a^2.$$

Häufig ersetzt man den Summationsindex durch einen anderen Ausdruck, wodurch sich natürlich die Indexmenge ändert; so ist

$$\sum_{j=1}^{3} a_j = \sum_{k=-1}^{1} a_{k+2} = a_1 + a_2 + a_3.$$

Allgemeine Rechenregeln für Summen:

1.

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n_1} b_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} (a_k + b_k)\,,$$

2.

$$c \sum_{k=n_0}^{n_1} a_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} (c a_k)\,.$$

Oft treten mehrfachen Summen auf:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_k b_j = \sum_{k=1}^{2} a_k \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{2} a_k \left(b_1 + b_2 + b_3\right)$$
$$= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3.$$

Mit Hilfer einer solchen Doppelsumme lässt sich auch das Produkt von Summen umformen:

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n_1} x_k\right)\left(\sum_{l=m_0}^{m_1} y_l\right) = \sum_{k=n_0}^{n_1}\sum_{l=m_0}^{m_1} x_k y_l.$$

Achtung!!! Bei einem Produkt der Form

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n_1} x_k\right)\left(\sum_{k=m_0}^{m_1} y_k\right),$$

d.h. wenn der Summationsindex gleich ist, muss man vor Bildung der Doppelsumme einen Summationsindex umbenennen:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=n_0}^{n_1} x_k\right)\left(\sum_{k=m_0}^{m_1} y_k\right) &= \left(\sum_{k=n_0}^{n_1} x_k\right)\left(\sum_{l=m_0}^{m_1} y_l\right)\\ &= \sum_{k=n_0}^{n_1}\sum_{l=m_0}^{m_1} x_k y_l.\end{aligned}$$

Analog zu Summen schreibt man für ein Produkt

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

kürzer

$$\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Alle Bemerkungen über Summationsindex und Indexmenge übertragen sich, wobei man jetzt natürlich vom Produktindex k spricht.

Offenbar gilt:

$$\left(\prod_{k=n_0}^{n_1} x_k\right)\left(\prod_{l=n_0}^{n_1} y_l\right) = \prod_{k=n_0}^{n_1}\left(x_k y_k\right)$$

bzw. allgemeiner für mehrfache Produkte

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\prod_{l=n_0}^{n_1} x_l^k\right) = \prod_{l=n_0}^{n_1}\left(\prod_{k=1}^{m} x_l^k\right).$$

Analog gilt für Quotienten von Produkten:

$$\frac{\left(\prod_{k=n_0}^{n_1} x_k\right)}{\left(\prod_{l=n_0}^{n_1} y_l\right)} = \prod_{k=n_0}^{n_1} \frac{x_k}{y_k};$$

natürlich nur, falls $\prod_{l=n_0}^{n_1} y_l \neq 0$ ist.

Achtung!!! Offenbar gilt:

$$\prod_{l=n_0}^{n} y_l = 0$$

genau dann, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, d.h. wenn gilt

es gibt ein l mit $y_l = 0$.

Bemerkung.

Später - nach Einführung des Konvergenzbegriffs - werden wir unendliche Summen und Produkte kennenlernen.