Mathematatik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 8

10. November 2009

Kapitel 2. Konvergenz von Folgen und Reihen

§2.1 Folgen

Definition 27.

Eine (reelle bzw. komplexe) Zahlenfolge ist eine $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-wertige Funktion definiert auf der Menge $\mathbb{N}$, d.h. eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \, (bzw.) \, \mathbb{C}$$
$$n \to f(n)$$

Man benutzt dann die Schreibweisen $a_n = f(n)$ für die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Die a_n heißen dann Glieder der Zahlenfolge.

Häufig definiert man eine Folge nur durch die Angabe der Vorschrift zur Bestimmung der Folgenglieder, und schreibt

$$a_n = \ldots$$

oder

$$\{\ldots\}.$$

Bemerkung

Oft als Definitionsbereich auch $\mathbb{N}_0$ statt $\mathbb{N}$, oder

$$\{m \in \mathbb{Z} \,:\, m \geqslant m_0\}$$

für ein $m_0 \in \mathbb{Z}$.

Entscheidend ist, dass die Indexmenge eine abzählbar unendliche geordnete Menge mit kleinstem Element ist.

Häufig werden Folgen rekursiv definiert.

Definition 28.

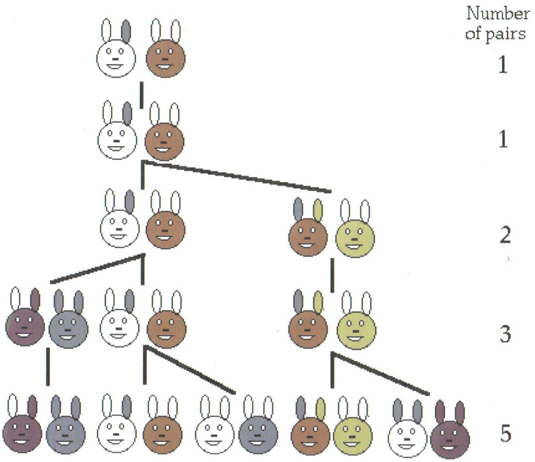
Bei der rekursiven Definition einer Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(bzw.* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$*) legt man die ersten k Glider* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *(bzw.* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$*) fest, und gibt eine feste Vorschrift an, nach der das n-te Folgenglied* a_n *mit* $n > k$ *(bzw.* $n \geqslant k$*) aus seinen Vorgängern* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ *(bzw.* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$*) zu berechnen ist.*

Häufig gehen in die Berechnung nur die letzen k Vorgänger $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$ ein.

Analog dazu werden mathematische Ausdrücke, die für alle $n \in \mathbb{N}$ (bzw. $n \in \mathbb{N}_0$) definiert werden sollen, rekursiv definiert.

Beispiel. (Fibonacci-Folgen in der Natur)

Ein Kaninchenpaar befinde sich in einem geschlossenen Gehege. Man überlege sich, wie viele Kaninchenpaare es nach einem Jahr gibt, wenn jedes Paar jeden Monat zwei Junge zeugt, welche sich ihrerseits vom zweiten Monat an vermehren. *(„Liber abbacci“, 1202)*


Number
of pairs
1
1
2
3
5

Definition 29.

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt konvergent, wenn es $a \in \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft:

- *Zu* ***jedem*** *- noch so kleinen - $\varepsilon > 0$ gibt es (mindestens) ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt*

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n \geqslant n_0.$$

Man nennt a den ***Grenzwert der Folge*** *$\{a_n\rangle$.*

Schreibweise:

- $$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$
  „Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für n gegen unendlich gegen a“.

- $$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
  „Limes von a_n für n gegen unendlich ist a“.

Definition 30.

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so nennt man $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine ***Nullfolge****.*

Bemerkung

Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Definition 31.

Besitzt eine Folge ***keinen*** *Grenzwert, so heißt sie divergent.*

Definition 32.

Die Folge $\{a_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* *Teilfolge* *von* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *wenn für die Folge* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt*

$$k_n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad n < m \quad \Rightarrow \quad k_n < k_m.$$

Satz 4.

Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent mit demselben Grenzwert.

Satz 5.

Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Zahlenfolge und r eine reelle Zahl.

Dann sind die Folgen $\{a_n \pm b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{r \cdot a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (r \cdot a_n) = r \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Satz 5 (Fortsetzung)

Ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Nullfolge (d.h.* $b_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ *und ist* $b_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. so konvergiert auch* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$*, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Folgerung

Zwei konvergente Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *haben denselben Grenzwert*

$$\Leftrightarrow$$

$\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge ist.*

Die obigen Rechenregeln erlauben es, die Grenzwerte komplizierter Folgen zu bestimmen.