Mathematik für Naturwissenschaftler I
WS 2009/2010

Lektion 9

17. November 2009

Kapitel 2. Konvergenz von Folgen und Reihen

§2.1 Folgen (Fortsetzung)

Bemerkung

Sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Nullfolgen, mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist dadurch noch nicht klar, was für die Folge $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt.

Die Folge kann divergieren aber auch konvergieren.

Definition 33.

Man nennt eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt, wenn es* $M > 0$ *gibt mit der Eigenschaft*

$$|a_n| \leqslant M \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 6.

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Bemerkung

Nicht jede beschränkte Folge ist converegnt.

Satz 7. (Bolzano und Weierstraß)

Jede *beschränkte Folge (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge.*

Definition 34.

Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Zahlenfolge. Die Folge hat den uneigentlichen Grenzwert* $+\infty$

$$\Leftrightarrow$$

es für jedes $B > 0$ *ein* $N_B \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geqslant N_B$ *gilt* $a_n > B$.

Definition 34.

Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Zahlenfolge. Die Folge hat den uneigentlichen Grenzwert* $-\infty$

$$\Leftrightarrow$$

es für jedes $B < 0$ *ein* $N_B \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geqslant N_B$ *gilt* $a_n < B$.

Satz 8. (uneigentliche Grenzwertsätze)

Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty,$$

und es sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge. Dann gilt*

$\boxed{1.}$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty}(-a_n - b_n) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty}(-a_n \cdot b_n) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + c_n) = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty}(-a_n + c_n) = -\infty$$

Satz 8. (Fortsetzung)

2. *Ist* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = 0.$$

3. *Ist* $\lim_{n\to\infty} c_n > 0$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = +\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} (-a_n \cdot c_n) = -\infty.$$

4. *Ist* $\lim_{n\to\infty} c_n < 0$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot c_n) = -\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} (-a_n \cdot c_n) = +\infty.$$

Satz 8. (Fortsetzung)

5. *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ *und* $c_n > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty.$$

6. *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ *und* $c_n < 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = -\infty.$$

Bemerkung

Unter den Voraussetzungen des Satzes können $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ und $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

- wohldefinierte Zahlen
- uneigentlichne Grenzwerte
- oder auch überhaupt nicht definiert sein.

§2.2 Reichen

Definition 36.

Es seien reelle (bzw. Komplexe) Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *gegeben.*

Die (unendliche) Reiche mit den Gliedern $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *kurz geschrieben als*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Definition 36. (Fortsetzung)

oder $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ *ist gerade die Folge* $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *der Teilsummen*

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i. \end{aligned}$$

Definition 36. (Fortsetzung)

Hat diese Folge einen Grenzwert S, so bezeichnet man die Reihe als konvergent und schreibt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Ist die Folge der Teilsummen $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent, so sagt man, dass die Reihe* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ *divergiert.*

Satz 9. (Rechenregeln)

Es seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ *und* $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ *konvergente Reihen und* $r \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\mathbb{C}$*).*

Dann sind $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ *und* $\sum_{i=0}^{\infty} (r \cdot a_i)$ *konvergente Reihen, und es ist*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i \pm b_i) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \pm \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (r \cdot a_i) = r \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right).$$