Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 1

13. April 2010

Kapitel 6. Integralrechnung

§6.4 Anwendung der Integration

In den Naturwissenschaften finden sich zahlreiche Beispiele, bei denen die Berechnung bestimmter Integrale nötig wird.

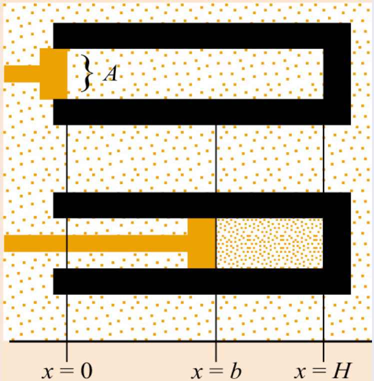
Das folgende Beispiel gibt Auskunft über die in einem Experiment geleistete Arbeit.

Auf einem Körper wirke abhängig von einer eindimensionalen Ortskoordinate x eine Kraft $F(x)$.

Nachdem sich der Körper von einer Ausgangsposition a zu einem anderen Ort b bewegt hat, erklärt der Physiker die Arbeit W, welche von der Kraft an diesem Körper verrichtet wurde, durch

$$W := \int_a^b F(x)dx.$$

Beispiel 6.4.1 (Ein beweglicher Kolben in einem Zylinder)



Kompression eines Gases

Beispiel 6.4.1 (Fortsetzung)

Betrachten wir einen Zylinder mit einem eingeschobenen, dicht abschließenden beweglichen Kolben der Querschnittsfläche A.

Der Kolben befinde sich anfangs an Startposition $x = 0$, während das geschlossene Ende des Zylinders fest an Position $x = H$ verharre.

Im Zwischenraum befinde sich eine Gasportion der Stoffmenge ν.

Die gesamte Apparatur befinde sich anfangs im Gleichgewicht. Dies bedeutet, dass der Druck p_0, der von außen auf den Kolben ausgeübt wird, dem Druck der Gasportion im Hohlraum entspricht.

Beispiel 6.4.1 (Fortsetzung)

Im Folgenden soll durch eine Bewegung des Kolbens nach rechts das Gas komprimiert werden.

Dabei wirkt dem Kolben eine Kraft entgegen, die umso stärker wird, je weiter wir im Zuge der Kompression den Kolben nach rechts verschieben.

Die rücktreibende Kraft ist eine Funktion

$$x \mapsto F(x)$$

auf dem Intervall $[0, H[$.

Beispiel 6.4.1 (Fortsetzung)

Die Arbeit W, die an dem Kolben bei einer Verschiebung des Kolbens von der Startposition 0 auf die Position $b < H$ geleistet wird, ist gegeben durch das bestimmte Integral

$$W = \int_0^b F(x)dx.$$

Beispiel 6.4.1 (Fortsetzung)

Die ortsabhängige Kraft $F = F(x)$ berechnet sich dabei in der folgenden Weise:

$$F(x) = (p_0 + p_K(x))\,A,$$

wobei $p_K(x)$ der Druck des Kolbens an Position $x \in [0, H[$ ist.

Man beachte

$$p_K(x) = -p_G(x).$$

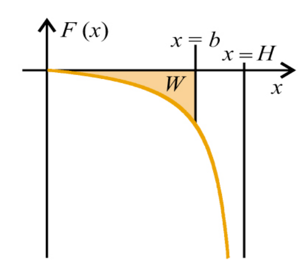
Nach der allgemeinen Gasgleichung (bei idealerweise konstanter Temperatur T und mit der allgemeinen Gaskonstante R)

$$p_G(x)V(x) = \nu RT, \qquad V(x) = A\,(H - x)$$

Beispiel 6.4.1 (Fortsetzung)

Dann

$$F(x) = p_0 A - \frac{\nu RT}{H - x}.$$



Bei der Kompression geleistete Arbeit.

Beispiel 6.4.1 (Fortsetzung)

$$W = \int_0^b F(x)dx = \int_0^b \left(p_0 A - \frac{\nu RT}{H - x} \right) dx$$

$$= p_0 Ab + \nu RT \ln \frac{H - b}{H}.$$

§6.5 Numerische Integration

Obwohl jede stetige Funktion Stammfunktionen besitzt (Hauptsatz!!!), gibt es elementare Funktionen, deren Stammfunktionen nicht elementar sind.

Beispiel 6.5.1

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}, \qquad \frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{e^x}{x}, \qquad \frac{1}{\ln x}, \qquad e^{-x^2}$$

Der Hauptsatz nützt nichts zur Berechnung eines Integrals wie

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Auch für „empirische Funktionen", d.h. für Funktionen, deren Werte nur on endlich vielen, z.B. gemessenen, Stellen bekannt sind, kann man den Hauptsatz nicht verwenden.

Zur Berechnung bestimmter Integrale mit konkreten numerischen Werten für die Grenzen a und b haben sich aus diesem Grund in der Praxis numerische Näherungsverfahren eingebürgert.

Sie versetzen uns in der Lage, auch ohne Kenntnis einer Stammfunktion den wahren Wert für

$$\int_a^b f(x)dx$$

beliebig genau zu approximieren.

Trapezregel

Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ wird $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle zerlegt (äquidistant):

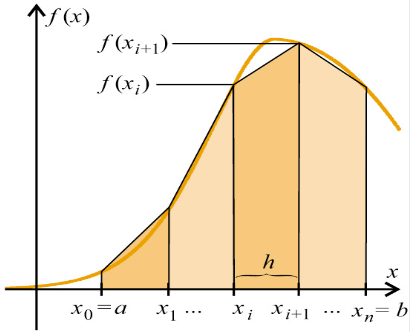
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$x_i := a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Auf $[x_{i-1}, x_i]$ wird dann f durch die lineare Funktion $\tilde{f}_i$ ersetzt mit

$$\tilde{f}_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \qquad \tilde{f}_i(x_i) = f(x_i).$$

Trapezregel (Fortsetzung)



Trapezregel

Trapezregel (Fortsetzung)

Die stückweise lineare Funktion $\tilde{f}$ mit

$$\tilde{f}(x) := \tilde{f}_i(x) \quad \text{für} \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

wird dann zur näherungsweisen Berechnung von $\int\limits_a^b f(x)dx$ benutzt, d.h. man nimmt als Näherungswert

$$\int\limits_a^b \tilde{f}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right).$$

Trapezregel (Fortsetzung)

Damit lautet die Trapezregel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left\{f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right\}.$$

Bemerkung.

Die Trapezregel ist exakt für lineare Funktionen, d.h.

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{falls} \quad f(x) = \alpha x + \beta.$$

Kepler'sche Fassregel

Die Kepler'sche Fassregel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}$$

ist nicht nur exakt für quadratische Funktionen, sondern sogar für Polynome dritten Grades!

Simpsonregel

Die Simpsonregel ist ein Spezialfall der Kepler'schen Fassregel.

Dazu zerlegen wir $[a, b]$ äquidistant in m Teilintervalle und verwende auf jedem Teilintervall die Kepler'sche Fassregel. Dann bekommen wir insgesamt $2m$ Teilintervalle

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2m} = b$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{2m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2m.$$

Simpsonregel (Fortsetzung)

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2(k-1)}}^{x_{2k}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{k=1}^{m} \frac{b-a}{6m} \{f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\} \\
&= \frac{b-a}{6m} \{f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \\
&\qquad + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(b)\}.
\end{aligned}
$$

Beispiel 6.5.2

Vergleich zwischen Trapezregel und Simpsonregel für

$$I := \int_0^2 e^{-x^2}\,dx$$

Beispiel 6.5.2 (Fall $m = 1$)

x	0	1	2
e^{-x^2}	1	0.36788	0.01832

Trapezregel:

$$I \approx \frac{1}{2}(1 + 2 \cdot 0.36788 + 0.01832) = \boxed{0.87704}$$

Kepler'sche Fassregel:

$$I \approx \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 0.36788 + 0.01832) = \boxed{0.82995}$$

Beispiel 6.5.2 (Fall $m = 2$)

x	0	0.5	1	1.5	2
e^{-x^2}	1	0.77880	0.36788	0.10540	0.01832

Trapezregel:

$$I \approx \frac{1}{4}(1 + 2 \cdot 0.77880 + 2 \cdot 0.36788 + 2 \cdot 0.10540 + 0.01832)$$
$$= \boxed{0.88062}$$

Kepler'sche Fassregel:

$$I \approx \frac{1}{6}(1 + 4 \cdot 0.77880 + 2 \cdot 0.36788 + 4 \cdot 0.10540 + 0.01832)$$
$$= \boxed{0.88181}$$

Beispiel 6.5.2 (Fortsetzung)

Einen exakteren Wert kann man entsprechenden Tabellen entnehmen (z.B. Abramowitz-Stegun: Handbook of Mathematical Functions).

So ist die Fehlerfunktion erf (error function) definiert durch

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt$$

und man findet

$$\operatorname{erf}(2) = 0.9953222650.$$

Beispiel 6.5.2 (Fortsetzung)

Mit $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.8862269255$ erhält man

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(2) \approx \boxed{0.88208139}$$

Ergebnis:

Für $m = 1$ ist die Trapezregel (zufällig) besser als die Kepler'sche Fassregel;

aber für $m = 2$ ist die Simpsonregel besser als die Trapezregel.