Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 10

25. Mai 2010

Kapitel 9. Matrizen und Determinanten

§9.4 Spezielle Matrizen und lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige bedeutsame Matrizen sowie die dazugehörigen linearen Abbildungen vorstellen.

Für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ beginnen wir mit der $m \times n$-Nullmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

deren Einträge ausschließlich aus Nullen bestehen.

Sie bildet jeden Vektor des $\mathbb{R}^n$ auf den Nullvektor des $\mathbb{R}^m$ ab.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad f(\vec{x}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m.$$

Definition 87.

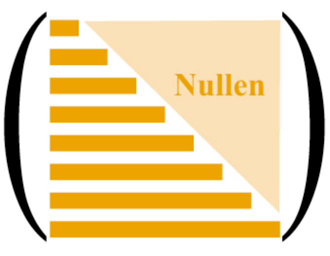
- *Unter der so genannten Hauptdiagonale der $n \times n$-Matrix wollen wir die Matrixelemente*

$$a_{11},\ a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

verstehen, die Matrix in einen linken unteren Teil und in einen rechten oberen Teil trennen.

Definition 87. (Fortsetzung)

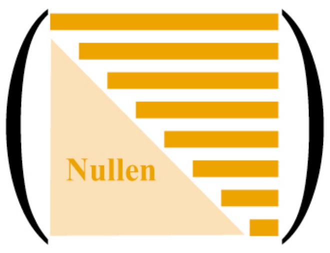
- *Handelt es sich bei den Elementen einer* ***quadratischen*** *Matrix oberhalb ihrer Hauptdiagonalen durchweg um* ***Nullen****, so sprechen wir von einer linken unteren Dreieckmatrix.*



Linke untere Dreiecksmatrix

Definition 87. (Fortsetzung)

- *Sind alle Einträge einer* ***quadratischen*** *Matrix unterhalb der Hauptdiagonalen* ***Nullen****, so liegt eine rechte obere Dreieckmatrix vor.*

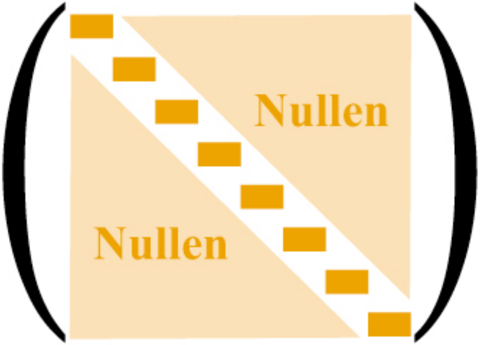


Rechte obere Dreieckmatrix

Betrachten wir Matrizen, bei welchen es sich gleichmaßen um eine rechte obere wie auch um eine linke untere Dreieckmatrix haldelt.

Die Matrizen, welche beiden Kriterien genügen, besitzen lediglich auf der Hauptdiagonalen Einträge, die von null verschieden sind.

Sie werden als Diagonalmatrizen bezeichnet.



Diagonalmatrix

Eine verbreitete Notation für eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist auch die Kurzschreibweise

$$D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Ein spezieller Vertreter einer Diagonalmatrix liegt vor, wenn alle Einträge der Hauptdiagonalen aus der Zahl 1 bestehen.

Unter der n-dimensionalen Einheitsmatrix E_n verstehen wir die Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren wir die n-dimensionale Einheitsmatrix mit einem beliebigen Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

so erhalten wir

$$E_n \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x},$$

d.h. der Vektor $\vec{x}$ wird unverändert reproduziert.

Die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad f(\vec{x}) = E_n\vec{x} = \vec{x}$$

bildet also jeden Vektor des $\mathbb{R}^n$ auf sich selbst ab und wird als Identität im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Beschränken wir uns auf eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ und betrachten den dargestellen Vektor

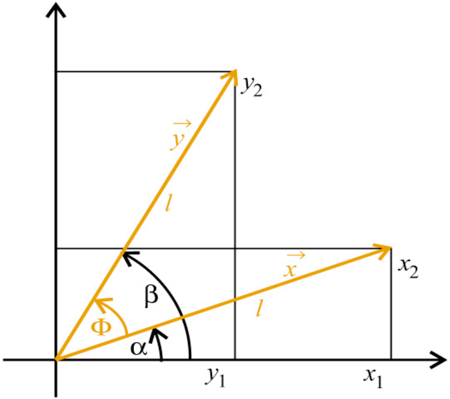
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

der zusammen mit der positiven x_1-Achse den Winkel α einschließt und die Länge $l > 0$ besitze.

Drehen wir diesen Vektor entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel ϕ um den Ursprung, so schließt der gedrehte Vektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dem Winkel $\beta = \alpha + \phi$ mit der positiven waagrechten Achse ein.



Drehung um den Winkel ϕ

Aus trigonometrischen Überlegungen heraus erhalten wir

$$\sin\beta = \frac{y_2}{l}, \qquad \sin\alpha = \frac{x_2}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{y_1}{l}, \qquad \cos\alpha = \frac{x_1}{l}.$$

Dann

$$\begin{aligned} y_1 &= l\cdot\cos\beta = l\cdot\cos(\alpha+\phi) = l\cdot\cos\alpha\cos\phi - l\cdot\sin\alpha\sin\phi \\ &= x_1\cos\phi - x_2\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= l\cdot\sin\beta = l\cdot\sin(\alpha+\phi) = l\cdot\sin\alpha\cos\phi + l\cdot\cos\alpha\sin\phi \\ &= x_2\cos\phi + x_1\sin\phi. \end{aligned}$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise notieren sich diese beiden Gleichungen in der kompakten Form

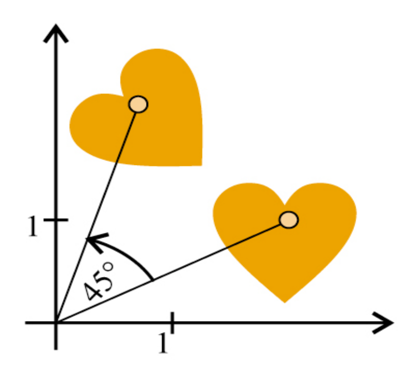
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung, die einem Vektor $\vec{x}$ des $\mathbb{R}^2$ den gedrehten Vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ zuordnet, wird also durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

dargestellt und ist daher eine lineare Abbildung. Die Matrix A wird dabei als Drehmatrix bezeichnet.

Beispiel 9.4.1.



Drehung um 45°

Beispiel 9.4.1 (Fortsetzung)

Die dargestelle Figur kann als Menge von Vektoren (Punkten) interpretiert werden.

Wollen wir die Figur um den Winkel $\phi = 45^\circ$ entgegen dem Uhrzeigersinn drehen, mit dem Ursprung als Drehzentrum, so haben wir wegen

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

diese Punkte des $\mathbb{R}^2$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

abzubilden.

Beispiel 9.4.1 (Fortsetzung)

In Abbildung dargestellt ist beispielweise der Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, der durch die Drehmatrix A auf den Bildpunkt

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

abgebildet wird.

Definition 88.

Unter einer symmetrischen Matrix verstehen wir eine quadratische $n \times n$-Matrix, für deren Einträge gilt

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Äquivalent dazu ist, dass die Matrix und ihre transponierte Matrix übereinstimmen, d.h. es ist

$$A = A^T.$$

§9.5 Lineare Gleichungssysteme und Matrizenkalkül

Jedes lineare $m \times n$-Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

bestehend aus m Gleichungen und n Unbekannten, lässt sich gleichwertig auch in der Schreibweise

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}} \tag{9.5.1}$$

mit der $m \times n$-Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und der rechten Seite

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

darstellen.

Bringen wir die Matrix A mit der von ihr induzierten linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

in Verbindung, so formuliert sich (9.5.1) noch kompakter zu

$$f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Wir können feststellen, dass

- ein lineares $m \times n$-Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn der Vektor $\vec{b}$ im Wertebereich von f liegt.

  Handelt es sich bei diesem nicht um den gesamten $\mathbb{R}^m$, so besitzt das LGS für manche rechte Seiten $\vec{b}$ keine Lösung.

- es im Fall der Lösbarkeit des Gleichungssystems vorkommen kann, dass mehrere Vektoren aus dem Definitionsbereich $\mathbb{R}^n$ auf den gegebenen Bildvektor $\vec{b}$ aus dem Bildbereich $\mathbb{R}^m$ abgebildet werden. Dies entspricht der Nichtumkehrbarkeit von f.

  Das LGS besitzt in diesem Fall mehrere Lösungen.

Bemerkung.

Dass es sich in letztem Fall bereits automatisch um unendlich viele Lösungen handelt, verdanken wir dem folgenden Umstand:

Gibt es mindestens zwei verschiedene Lösungen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ von

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{b},$$

gilt also

$$f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) = \vec{b},$$

so erhalten wir wegen der Linearität der Abbildung f

$$f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) = \vec{0}.$$

Bemerkung. (Fortsetzung)

Für jede der unendlich viele Zahlen $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir dann (wieder aufgrund der Linearität)

$$f(\vec{x}_1 + c \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + c \cdot \underbrace{f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}_{=\vec{0}} = f(\vec{x}_1) = \vec{b}.$$

Also besitzt die Gleichung $f(\vec{x}) = \vec{b}$ die unendlich vielen Lösungen

$$\vec{x}_1 + c \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

§9.6 Determinanten

Wir wollen jeder $n \times n$-Matrix A eine reelle Zahl zuordnen, welche wir als Determinante von A bezeichnen wollen.

Ausdrücklich sei betont, dass diese Größe ausschließlich für quadratische Matrizen definiert ist.

Die Determinante einer quadratischen $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

wird mit

$$\det A \quad \text{oder auch} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

notiert.

Definition 89.

Unter Determinante eine 2×2-Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

verstehen wir

$$\boxed{\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Definition 90.

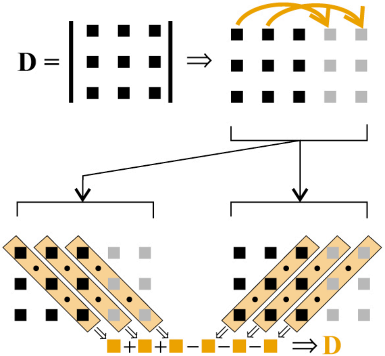
Unter Determinante eine 3×3-Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

verstehen wir

$$\boxed{\begin{aligned} \det A := {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}}\,.$$

Regel von Sarrus



Regel von Sarrus (Fortsetzung)

1. Neben die dritte Spalte der Matrix setzen wir nochmals die beiden ersten Spalten.
2. Wir addieren jeweils die Produkte der drei in Abbildung dargestellten, von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen.
3. Davon abziehen müssen wir hingegen die Produkte der drei von links unten nach rechts oben verlaufenden Diagonalen.

Definition 91.

Zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ *sei die Adjunkte* A_{ij} *definiert als die Zahl*

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij},$$

wobei M_{ij} diejenige 2×2-Matrix ist, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

Bemerkung.

Mit dem Begriff der Adjunkten können wir die Regel von Sarrus auf eine andere Weise formuliert.

$$\begin{aligned}\det A :&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\end{aligned}$$

Ausklammern wir beispielweise nacheinander a_{11}, a_{12}, a_{13}, welche die erste Zeile der Matrix A bilden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\cdot(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}\cdot(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21})\\ &\quad + a_{13}\cdot(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\\ &= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} + a_{12}\cdot(-1)\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}\\ &\quad + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.\end{aligned}$$

Genauso gut können wir beispielweise jeweils die Elemente a_{12}, a_{22} und a_{32} ausklammern, die in der Matrix A die 2. Spalte bilden. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&= a_{12} \cdot (a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{22} \cdot (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) \\
&\quad + a_{32} \cdot (a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11}) \\
&= a_{12} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad + a_{32} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.
\end{aligned}$$

Bemerkungen.

- Abhängig davon, welche Elemente a_{ij} wir in der Formel von Sarrus ausklammern, erhalten wir jeweils unterschiedliche Formeln, die jedoch alle auf den Wert der Determinanten von A führen.

- Wichtig ist lediglich, dass besagte drei Elemente innerhalb einer Zeile oder einer Spalte der Matrix A liegen.

- Wählen wir beispielsweise die Elemente a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} der i-ten Matrixzeile, so erhalten wir die Formel

  $$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}.$$

  Man spricht hierbei von einer Entwicklung der Determinanten von A nach der i-ten Zeile.

Bemerkungen. (Fortsetzung)

- Ebenso erhalten wir, wenn wir die Elemente a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} der j-ten Matrixspalte wählen, die Formel

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}.$$

  Man spricht dann von einer Entwicklung der Determinanten von A nach der j-ten Spalte.

Definition 92. (Determinante einer $n \times n$-Matrix)

Es sei A eine $n \times n$-Matrix.

Ferner sei M_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

Wieder bezeichnen wir

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

als die Adjunkte von A zum Doppelindex (ij).

Definition 92. (Fortsetzung)

Dann sei die Determinante von A definiert durch

$$\underbrace{\det A = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}}_{\textit{Entwicklung nach der } i-\textit{ten Zeile}} \quad \textit{für jeden Zeilenindex } i \textit{ mit } 1 \leqslant i \leqslant n$$

oder auch

$$\underbrace{\det A = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}}_{\textit{Entwicklung nach der } j-\textit{ten Spalte}} \quad \textit{für jeden Spaltenindex } j \textit{ mit } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Die Definition 92 ist eine Beispiel für eine rekursive Definition.

Sie führt die Definition einer $n \times n$-Determinanten auf die Berechnung von n Determinanten der Dimension $(n-1) \times (n-1)$ zurück.

Bemerkung.

Interpretieren wir eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ als eine 1×1-Matrix, so erklären wir die Determinante dieser „Matrix" schlichtig als die Zahl selbst, also

$$\det(c) := c.$$

In unserem Vorhaben, die Determinanten von $n \times n$-Matrizen für alle $n \in \mathbb{N}$ zu erklären, haben wir damit auch die letzte Lücke geschlossen.

Zudem erweist sich unter diesen Umständen die Definition für 2×2-Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}.$$

Praxis-Hinweise

- Die Determinanten-Berechnung von Matrizen der Dimension $n \times n$ ist bereits für $n = 4$ eine Unterfangen mit hohem Rechenaufwand.
- Spätestens ab $n = 5$ ist eine Berechnung von Hand im Allgemeinen unsinnig, da parallel zum intensiven Rechenaufwand auch die Gefahr von Rechenfehlern wächst.
- Scheuen Sie sich daher nicht, in einem solchen Fall auf die Hilfe von Computer-Algebra-Systemen zurückzugreifen.

Bemerkung.

Rein formal kann das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) auch als Determinante dargestellt werden in der Form

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} .$$

Ausdrücklich muss hierbei erwähnt werden, dass diese Formel im wahrsten Sinne des Wortes **formaler** Natur ist, denn Vektoren haben innerhalb einer Determinante, deren Einträge aus Zahlen bestehen, eigentlich nichts zu suchen. Was das Auswendigmerken angeht, ist diese Darstellung trotz ihres formalen Charakters aber durchaus geeignet.