Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 12

8. Juni 2010

Kapitel 10. Lineare Gleichungssysteme

§10.1 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren (Fortsetzung)

Quadratische LGS $(m = n)$ (Fortsetzung)

Falls mindestens eines der Hauptdiagonalelemente $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$ den Wert 0 annimmt, so ist das LGS nicht eindeutig lösbar.

In diesem Fall müssen wir untersuchen, ob das System nicht lösbar ist oder mehrere Lösungen besitzt.

Stoßen wir in der i-ten Zeile auf ein Hauptdiagonalelement $d_{ii} = 0$, so ist Vorsicht geboten:

Nach Einsetzen der bislang berechneten Werte für $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ besitzt die i-te Zeile die Gestalt

$$0 \cdot x_i = c_i.$$

Quadratische LGS ($m = n$) (Fortsetzung)

2) Ist $c_i \neq 0$, so liegt ein Wiederspruch vor, selbst wenn sich die „unteren" Werte $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$ problemlos hatten berechnen lassen.

   Ein einziger solcher Widerspruch genügt, um das LGS als unlösbar zu charakterisieren.

Quadratische LGS $(m = n)$ (Fortsetzung)

3) Ist $c_i = 0$, so lautet die i-te Zeile

$$0 \cdot x_i = 0.$$

Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen: Offensichtlich ist die für jede reelle Zahl erfüllt.

Um dieser Beliebigkeit mathematischen Ausdruck zu verleihen, geben wir dieser Lösung „den Namen" **p**. Der Ausdruck **p** wird als **Parameter** bezeichnet.

Indem wir $x_i := \mathbf{p}$ setzen, errechnen wir in Abhängigkeit von **p** durch sukzessives Einsetzen von unten nach oben die weiteren Werte $x_{i-1}, \ldots, x_1$.

Quadratische LGS $(m = n)$ (Fortsetzung)

Haben wir es nach Einsetzen der bereits errechneten Werte $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{j+1}$ mit mehreren Zeilen der Form

$$0 \cdot x_j = 0$$

zu tun, so müssen wir ggf. weitere Parameter einführen.

Die Lösung hängt dann von einer Reihe von Parametern ab.

Unterbestimmte LGS $(m < n)$

Besitzt ein LGS weniger Zeilen als Spalten bzw. Unbekannte, so spricht man von einem unterbestimmten LGS.

Indem wir das System künstlich um $n - m$ Zeilen der Form

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$$

erweitern, gewinnen wir ein quadratisches LGS, für welches unsere Betrachtungen aus dem letzten Abschnitt anwendbar sind.

Unterbestimmte LGS $(m < n)$ (Fortsetzung)

Um dieses erweiterte LGS auf obere Dreiecksgestalt zu bringen, müssen wir die hinzugefügten Nullstellen nicht antasten. Insbesondere gibt nach Umformung $n - m$ Hauptdiagonalelemente mit Wert null.

Eine eindeutige Lösung ist somit auszuschließen.

Satz 67. Unterbestimmtes LGS

Ein unterbestimmtes LGS besitzt entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

Überbestimmte LGS $(m > n)$

Um das Problem wieder auf ein quadratisches LGS zurückführen, führen wir $m - n$ Hilfsvariable $x_{n+1}, \ldots, x_m$ ein.

Nach Umformung auf obere Dreiecksgestalt besitzt das obere Dreiecksschema dann wieder Nullen auf der Hauptdiagonalen.

Das System ist daher entweder nicht lösbar oder besutzt unendlich viele (von einem oder mehrere Parametern abhängige) Lösungen.

Falls mehrere Lösungen gibt es, streichen wir gedanklich die künstlich eingeführten Hilfsvariablen $x_{n+1}, \ldots, x_m$ und setzen nur die Variablen x_1 bis x_n als Lösungen des Anfangssystems fest.

Neben dem Lösen linearer Gleichungssysteme kann das Gauß-Verfahren auch dazu eingesetzt werden, die Determinante einer quadratischen Matrix zu berechnen:

Addieren wir zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante im Zuge dieser Transformation nicht (siehe Satz 63).

Bei den anderen Transformationen des Gauß-Verfahrens ist jedoch Vorsicht geboten!!!

- Multiplizieren wir eine Zeile der Matrix A mit einem Faktor $c \neq 0$, so ändert sich die Determinante von A gleichsam um den Faktor c.

  Wir haben also die Determinante nach der Zeilenmultiplikation korrigierend mit dem Faktor $\frac{1}{c}$ zu versehen, wenn wir die Gleichheit der Determinanten erhalten wollen.

- Eine Korrektur der Determinante um den Faktor (-1) ist nötig, wenn wir während des Gauß-Algorithmus zwei Zeilen oder Spalten vertauschen.

Durch die Gauß-Transformationen bringen wir die Matrix auf eine obere Dreiecksgestalt.

Die Determinante dieser Matrix ist dann nach dem Satz 62 als Produkt ihrer Hauptdiagonalelementen leicht zu berechnen.

§10.2 Das Determinantenverfahren (Cramer'sche Regel)

In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns ausschließlich auf die Lösung regulärer quadratischer $n \times n$-Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

Ein solches LGS heißt regulär, wenn die zugrunde liegende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Nach dem Gauß-Verfahren wollen wir in diesem Abschnitt ein weiteres Verfahren, die so genannte Cramer'sche Regel, vorstellen, um die eindeutig bestimmte Lösung eines quadratischen regulären LGS zu bestimmen.

Das Verfahren bedient sich dabei der Determinanten verschiedener $n \times n$-Matrizen, was ihm auch die Bezeichnung Determinantenverfahren verliehen hat.

Beginnen wir mit einem regulären 2×2-LGS

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2, \end{array} \tag{10.2.1}$$

für welches nach den obigen Ausführungen genau eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ existiert.

Zudem gilt für die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

wegen der Regularität, dass

$$D := \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Wir multiplizieren die erste der beiden Gleichungen in (10.2.1) mit dem Faktor a_{22} sowie die zweite mit dem Faktor a_{12} und erhalten

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}a_{22}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 & = & b_1a_{22} \\ a_{21}a_{12}x_1 & + & a_{22}a_{12}x_2 & = & b_2a_{12}. \end{array}$$

Eine Subtraction der zweiten Gleichung von der ersten und Auflösen nach x_1 führt dann auf die Lösung

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{D}.$$

Genauso gut können wir die erste Gleichung in (10.2.1) mit a_{21} und die zweite Gleichung mit a_{11} multiplizieren.

Nach Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten und Auflösen nach x_2 erhalten wir

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{D}.$$

Wir führen dazu die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad A_2 := \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

ein.

Ausgehend von der Matrix A haben wir A_1 dadurch gebildet, dass wir die erste Spalte von A ersetzt haben durch die rechte Seite $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ unseres LGS.

Analog dazu geht A_2 aus A dadurch hervor, dass deren zweite Spalte ersetzt wurde durch die rechte Seite $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Die Determinanten dieser Matrizen berechnen sich zu

$$D_1 := \det A_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

sowie

$$D_2 := \det A_2 = a_{11} b_2 - a_{21} b_1 .$$

Somit können wir die Lösungen x_1 und x_2 auch schreiben in der Form

$$\boxed{x_1 = \frac{D_1}{D}} \qquad \boxed{x_2 = \frac{D_2}{D}}$$

Dieses Resultat gilt ganz allgemein für quadratische reguläre $n \times n$-Gleichungssysteme.

Satz 67. (Lösungen regulärer quadratischer LGS)

Zu lösen sei das reguläre $n \times n$-LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

mit zugehöriger $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Satz 67. (Fortsetzung)

Ferner sei A_i $(i = 1, \dots, n)$ die $n \times n$-Matrix, die aus der Matrix A dadurch hervorgeht, dass die i-te Spalte von A durch die rechte Seite

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ersetzt wird. Mit den Abkürzungen

$$D = \det A \quad \textit{und} \quad D_i := \det A_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

besitzt das LGS dann die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Bemerkung.

Liegt die Aufgabe vor, ein homogenes System

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

zu lösen, und ist die Grundvoraussetzung $\det A \neq 0$ erfüllt, so ist klar, dass das System nur eine einzige Lösung und zwar die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ besitzt.

Eine „Berechnung" dieser einzigen Lösung durch die Cramer'sche Regel ist dann überflüssig.

Bemerkung.

Haben wir es bei einem Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit quadratischer $n \times n$-Matrix A mit dem Fall

$$\det A = 0$$

zu tun, so ist die Cramer'sche Regel nicht anwendbar.

Bemerkung (Fortsetzung)

- Ist das System homogen, ist also $\vec{b} = \vec{0}$, so besitzt das LGS unendlich viele Lösungen.

- Ist das System inhomogen, so lässt sich die folgende Aussage machen:

  Ist mindestens eine der Determinanten $D_1, \ldots, D_n$ ungleich null, so besitzt das LGS keine Lösung.

  Hingegen lässt sich im Fall $D_1 = \cdots = D_n = 0$ ohne weitere Untersuchungen nicht entscheiden, ob das System keine Lösungen hat oder ob unendlich viele Lösungen vorliegen.

Praxis-Hinweis.

Um die Lösung eines quadratischen $n \times n$-LGS zu erhalten, haben wir nach dem Determinantenverfahren $n + 1$ Determinanten der Dimension n zu berechnen.

Wie wir bereits festgestellt hatten, ist das Berechnen von Determinanten im Fall $n \geqslant 4$ eine äußerst mühevolle Angelegenheit.

Zur alltäglichen Berechnung der Lösung LGS ist daher für $n \geqslant 4$ im Allgemeinen das effektivere und schnellere Gauß-Verfahren vorzuziehen.