Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 17

8. Juli 2010

Kapitel 13. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

§13.2 Elementare Lösungsverfahren (Fortsetzung)

4. Form $y' = f(ax + by + c)$

Sei f eine stetige Funktion der Linearkombination $ax + by + c$ mit reellen Koeffizienten a, b und c.

Wir substituieren

$$u(x) := ax + by(x) + c$$

was auf die Gleichung

$$y'(x) = f(u(x))$$

führt. Eine Differentiation von $u(x)$ nach x ergibt

$$u'(x) = a + by'(x) = a + b \cdot f(u(x)).$$

4. Form $y' = f(ax + by + c)$ (Fortsetzung)

Damit liegt (nunmehr in den Variablen x und y) der Fall einer autonomen DG vor. Wir stellen um:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{a + b \cdot f(u)}$$

und erhalten durch Itegration die Lösungsschar

$$\boxed{x(u) = \int \frac{1}{a + b \cdot f(u)} du}$$

sowie ggf. Sonderlösungen

$$\boxed{u(x) \equiv u_0}$$

für Nullstellen u_0 der Funktion $a + b \cdot f(u)$.

4. Form $y' = f(ax + by + c)$ (Fortsetzung)

Nach Berechnung des Integrals ersetzen wir u in dieser Schar wie auch in den Sonderlösungen wieder durch den Ausdruck $ax + by + c$ (Resubstitution) und erhalten eine implizite Form der allgemeinen Lösung.

Abhängig vom konkreten Beispiel kann möglicherweise durch Auflösen nach y die explizite Form $y(x)$ hergestellt werden.

5. Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Ähnlichkeits-Differentialgleichung, homogene Differentialgleichung)

Ein formaler Ausdruck $f(x, y)$, welcher für zwei Werte x und y das gleiche Resultat liefert wie für die mit einem gemeinsamen faktor c gestreckten Werte cx und cy, heißt homogen oder auch ähnlich.

Wir nehmen an, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, so dass wir nur die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ auszunehmen haben.

5. Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Fortsetzung)

Wir setzen

$$u(x) := \frac{y(x)}{x},$$

womit wir die Beziehung $y' = f(u)$ erhalten.

Im Folgenden beachte man, dass die Variablen $u = u(x)$ sowie $y = y(x)$ Funktionen von x darstellen.

5. Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Fortsetzung)

Direkt aus der Substitutionsvorschrift stammt die Beziehung

$$y(x) = u(x) \cdot x.$$

Durch Differentiation nach x erhalten wir daraus

$$y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x) \cdot 1 = f(u),$$

was zusammen mit $y' = f(u)$ auf die Gleichung die wir wegen $x \neq 0$ in der expliziten gestalt

$$\frac{du}{dx} = u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

schreiben können.

5. Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Fortsetzung)

Die DG in x und u

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

lösen wir wieder durch Trennung der Variablen: Dadurch gelangen wir zu der Gleichung

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

wo wir beidseitig integrieren, d.h.

$$\boxed{\int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_1 \qquad (C_1 \in \mathbb{R}).}$$

5. Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Fortsetzung)

Bisweilen kann es günstig sein, den Ausdruck auf der rechten Seite durch $C_2 := e^{C_1} > 0$ bzw. $C_1 = \ln C_2$ unzuformen auf die Gestalt

$$\ln|x| + C_1 = \ln|x| + \ln C_2 = \ln(C_2 \cdot |x|) = \ln|C_2 \cdot x| \qquad (C_2 > 0).$$

5. Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Fortsetzung)

Zusätzlich sind die Lösungen

$$\boxed{u(x) \equiv u_0}$$

in die Lösungsschar aufzunehmen, falls u_0 eine Nullstelle der rechten Seite ist, fall also gilt

$$f(u_0) - u_0 = 0.$$

5. Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (Fortsetzung)

Nach der Berechnung des Integrals resubstituiren wir wieder

$$u = \frac{y(x)}{x}$$

und erhalten eine implizite Form der allgemeinen Lösung der DG.

Möglicherweise kann daraus wieder eine explizite Darstellung $y(x)$ gewonnen werden.

6. Form $y' = -\dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$ mit $g_y = h_x$ (Exakte Differentialgleichung)

Wir wollen hier annehmen, dass die Funktionen $g(x, y)$ und $h(x, y)$ auf einem ebenen Rechteckgebiet R definiert und dort differenzierbar sind mit stetigen partiellen Ableitungen $g_y(x, y0$ und $h_x(x, y)$.

Die entscheidende Rolle spielt bei einer DG dieser Form die Schwarz'sche Bedingung $g_y = h_x$ oder ausführlich

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,y) \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in \mathbb{R}.$$

6. Form $y' = -\dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$ mit $g_y = h_x$ (Fortsetzung)

Aufgrund der Annahme $g_y = h_x$ handelt es um das totale Differential einer Funktion $V(x,y)$, also

$$dV(x,y) = g(x,y)dx + h(x,y)dy = 0.$$

Wir können für ein totales Differential durch Integration eine solche Stammfunktionenschar gewinnen durch die Formel

$$V(x,y) = \int_a^x g(\xi, b)d\xi + \int_b^y h(x,\eta)d\eta$$

mit einem beliebig gewählten Punkt (a,b) aus dem Gebiet R.

6. Form $y' = -\dfrac{g(x,y)}{h(x,y)}$ mit $g_y = h_x$ (Fortsetzung)

Andererseits ist $dV(x,y) = 0$ für alle Punkte $(x,y) \in R$, also $V(x,y) = const = C$. Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\boxed{\int_a^x g(\xi, b)d\xi + \int_b^y h(x,\eta)d\eta = C}.$$

Diese Gleichung definiert eine Schar impliziter Kurven, welche der Ausgangsgdifferentialgleichung genügen.