Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 2

15. April 2010

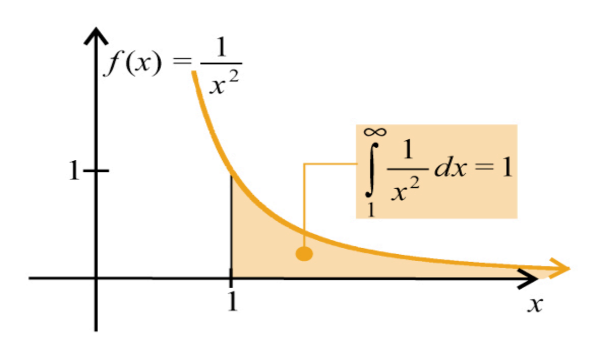
Kapitel 6. Integralrechnung

§6.6 Uneigentliche Integrale

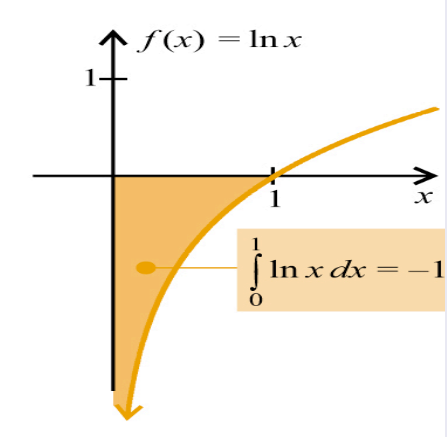
Bei der Definition des bestimmten Integrals hatten wir uns auf Funktionen zurückgezogen, die auf einem beschränkten Intervall definiert und dort beschränkt waren.

Im Folgenden wollen wir erläutern, wie wir auch für unbeschränkte Intervalle und unbeschränkte Funktionen ein Integral definieren können.

Beispiel 6.6.1 (Einseitig unbeschränkter Definitionsbereich)



Beispiel 6.6.2 (Integration bei unbeschränkter Funktion f)



Definition 62.

Gegeben sei das Intervall $I := [a, \infty)$ und eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$.

Wir erklären das uneigentliche Integral von f bezüglich x von a bis ∞ durch

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

sofern dieser Grenzwert existiert.

Bemerkungen.

- Wir berechnen also stets nur Integrale auf dem endlichen Abschnitt $[a, b]$ und lassen danach die obere Grenze b gegen unendlich gehen.
- Der Fall $I = (-\infty, a]$ wird genauso behandelt.
- Damit das Integral
$$\int_a^\infty f(x)dx$$
existiert, genügt es nicht, dass die Funktion f für betragsgroße $x \in \mathbb{R}$ nur gegen null geht.

Definition 63.

Sei f eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und beschränkt.

Sofern es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die beiden einseitig uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \qquad \text{und} \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)dx \tag{6.6.1}$$

existieren, können wir das beidseitig uneigentliche Integral definieren als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Bemerkungen.

- Die Wahl von a spielt hierbei keine Rolle. Existieren die beiden Integrale in (6.6.1) für ein $a_0 \in \mathbb{R}$, so existieren sie auch für jedes weitere beliebige $a \in \mathbb{R}$.

- Man beachte, dass wir das beidseitig uneigentliche Integral nicht durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

definiert hatten.

Beispiel 6.6.3

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x$. Dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x dx = \lim_{R\to\infty} 0 = 0,$$

da wegen der Punktsymmetrie der ersten Winkelhalbierenden zum Ursprung

$$\int_{-R}^{R} x dx = 0$$

für jedes $R > 0$ gilt.

Bemerkung.

- Umgekehrt aber lässt sich sagen: Ist die beidseitig uneigentliche Integrierbarkeit einer Funktion f im Sinne der Definition 63 bereits bekannt, so stimmt der Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

auch mit dem Wert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

überein.

Definition 64.

Es sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \textit{oder} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Wir setzen

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx.$$

Bemerkung.

Analog lassen sich die Fälle $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ für eine stetige Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ behandeln.

Kapitel 7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

§7.1 Vektorfelder

Der Begriff des „Feldes“ist in der naturwissenschaftlichen Literatur allgegenwärtig.

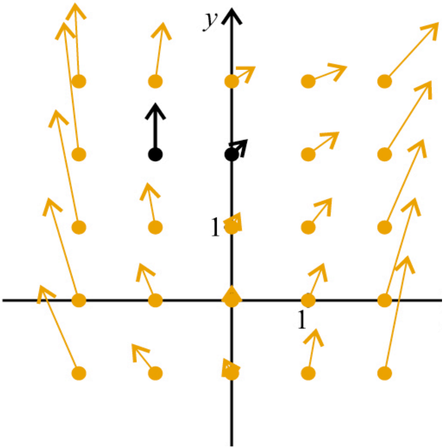
Abhängig von der genauen Position auf einer Ebene oder innerhalb eines Raumes begegnen uns elektrische, magnetische oder Gravitationskräfte, also Größen, die wir im Allegmeinen als Vektor repräsentieren.

Definition 65.

*Ein **Feld** oder auch **Vektorfeld** ist eine Abbildung f von einem Teilgebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$*

Bemerkungen.

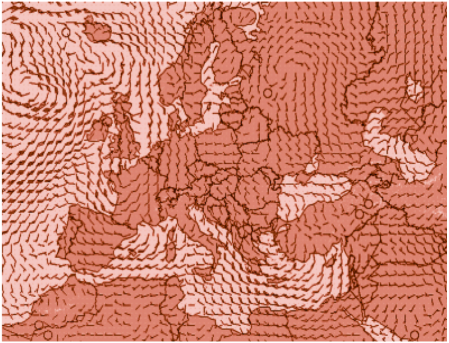
- In der Praxis zukommt meist den Fällen $n = 2, 3$ vorrangige Bedeutung. Punkten bzw. Ortsvektoren der Ebene (bzw. des Raumes) werden dabei wiederum Vektoren (bzw. des Raumes) zugeordnet.
- Graphisch geschieht dies, indem ausgewählten Punkten des Definitionsbereichs die entsprechenden Bildvektoren als Pfeile angeheftet werden.



Vektorfeld $f(x,y)$

Manche graphische Darstellungen von Vektorfeldern geben zwar die Richtung der Bildvektoren korrekt wieder, normieren aber die Vektorenlänge auf einen einheitlichen Wert und bringen den Betrag der Bildvektoren auf andere Weise zum Ausdruck.

Am Beispiel eines Windfeldes wird dies sichtbar. Hohe Windgeschwindigkeiten entsprechen einer hohen Anzahl von Fähnchen, die an den Vektor angehängt werden.



Windfeld

Ein Vektorfeld $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ können wir auch als eine Ansammlung von n einzelnen Funktionen

$$f_1, \ldots, f_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

zusammengepackt in einen Vektor $\vec{f}$, interpretieren.

Damit bleibt der gesamte Begriffsapparat: Ein Vektorfeld heißt stetig, (partiell) differenzierbar etc., wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ diese jeweiligen Eigenschaften besitzen.

§7.2 Gradientenfelder, Stammfunktionen, Potenzial

Definition 66.

Für eine differnzierbare, auf eine Teilmenge D des $\mathbb{R}^n$ definierte Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ mehrerer Veränderlicher ist der ***Gradient***

$$\operatorname{grad} F(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld auf D.

Sei

$$\vec{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

ein gegebene, auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ definierte Vektorfeld von n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$.

Frage 1:

Unter welchen Bedingungen ist $\vec{f}(\bar{\mathbf{x}})$ der Gradient einer differenzierbaren, auf D definierten Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$?

Frage 2:

Wann gibt es also eine differenzierbare Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\operatorname{grad} F(x_1, \ldots, x_n) = \vec{f}(\bar{\mathbf{x}})?$$

Man kann dieses Problem in äquivalenter Weise auch so ausdrücken: Unter welchen Umständen handelt es sich bei dem Ausdruck

$$f_1(x_1,\dots,x_n)dx_1 + \cdots + f_n(x_1,\dots,x_n)dx_n$$

um das totale Differential einer Funktion $F(x_1,\dots,x_n)$; bzw. wann gilt

$$dF(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1,\dots,x_n)dx_1 + \cdots + f_n(x_1,\dots,x_n)dx_n$$

für eine Funktion $F(x_1,\dots,x_n)$?

Definition 67.

Man spricht im Fall der Existenz einer solchen Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ auch von einer Stammfunktion bzw. einem Integral des Vektorfeldes $\vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

Das Feld $\vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$ selbst wird unter diesen Umständen als Gradientenfeld oder als konservatives Feld bezeichnet.

Bemerkung.

Die Stammfunktion $F(x_1, \ldots, x_n)$, falls sie existiert, bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.

Definition 68.

Besonders in physikalischem Zusammenhang spricht man bei der Funktion

$$U(x_1, \ldots, x_n) := -F(x_1, \ldots, x_n)$$

auch von einem Potenzial des Vektorfeldes $\vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

Bemerkung.

Das Minuszeichen bietet dabei hauptsächlich formale Vorteile, hat aber keiner tiefer liegende mathematische Bedeutung.