

Mathematik für Naturwissenschaftler II

SS 2010

Lektion 5

29. April 2010

Kapitel 7. Integralrechnung in mehreren Veränderlichen

§7.6 Das Kurvenintegral für totale Differentiale (Fortsetzung)

Abschließend sei noch ein wichtiger Zusammenhang zum Integral über geschlossene Kurven aufgezeigt:

Definition 71.

Wir nennen eine Kurve C mit der Parametrisierung $\vec{p}(t)$, ($t \in [a, b]$) *geschlossen*, wenn ihr Start- und Endpunkt zusammenfallen, wenn also

$$\vec{p}(a) = \vec{p}(b)$$

gilt.

Satz 52.

Die Aussage

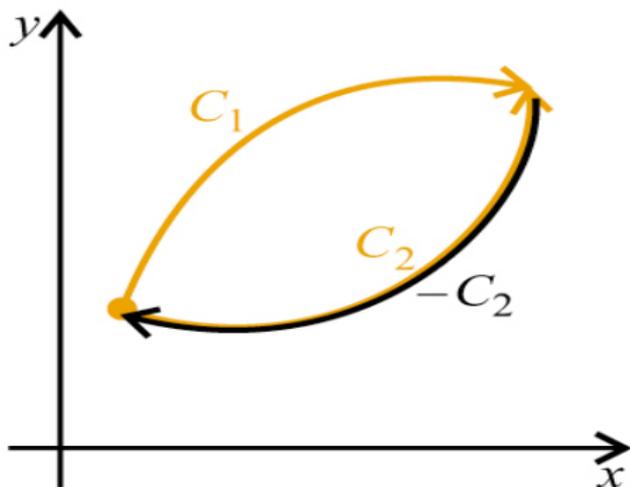
Das Kurvenintegral ist wegunabhängig.

ist dann gleichwertig zur Aussage

*Das Kurvenintegral über jede geschlossene Kurve C
hat den Wert 0.*

Beweis.

- ⇐ Haben wir es mit zwei Kurven C_1 und C_2 zu tun, so ist die Kurve $-C_2 \circ C_1$ geschlossen.



Zur Äquivalenz der Aussagen

⇐ Ist das Wegintegral über jede geschlossene Kurve gleich null, so auch über diese Kurve $-C_2 \circ C_1$, also

$$0 = \int_{-C_2 \circ C_1} = \int_{C_1} + \int_{-C_2} = \int_{C_1} - \int_{C_2},$$

woraus sich

$$\int_{C_1} = \int_{C_2},$$

also die Wegunabhängigkeit ergibt.

⇒ Ist umgekehrt das Wegintegral wegunabhängig, so gilt für eine geschlossene Kurve C , die sich in C_1 und C_2 aufspalten und als $C = -C_2 \circ C_1$ schreiben lässt,

$$\int_C = \int_{-C_2 \circ C_1} = \int_{-C_2} + \int_{C_1} = \int_{C_1} - \int_{C_2} \stackrel{\text{Wegunabh.}}{=} 0.$$



§7.7 Anwendungen

Gegeben sei eine Gasportion vom Volumen V mit gegebener Temperatur T .

Erhöht man die Temperatur der Gasportion um einen Betrag dT und lässt das **Volumen konstant**, so ändert sich die Wärmemenge des Gases um einen Betrag

$$\partial Q(T, V) = C_\nu \cdot dT$$

mit einer Konstanten C_ν , die lediglich von der Stoffmenge ν der Gasportion abhängt.

Andererseits

$$\partial Q(T, V) = \frac{RT}{V} dV,$$

wenn er das Volumen des Gases **isotherm**, d.h. bei **konstanter Temperatur** T , um dV erhöht.

(R ist die allgemeine Gaskonstante).

Zusammengenommen haben also gleichzeitige Änderungen dV und dT in Volumen und Temperatur eine Änderungen der Wärmemenge um

$$\partial Q(T, V) = \underbrace{C_v}_{=:f(T, V)} \cdot dT + \underbrace{\frac{RT}{V}}_{=:g(T, V)} \cdot dV$$

zur Folge.

Frage:

Gibt es eine differenzierbare Funktion $Q(T, V)$, die einer Gasportion vom Volumen V und Temperatur T ihre Wärmemenge Q zuordnet?

Wäre dies so, so müsste es sich bei dem Differential

$$\partial Q(T, V) = \underbrace{C_v}_{=:f(T, V)} \cdot dT + \underbrace{\frac{RT}{V}}_{=:g(T, V)} \cdot dV$$

um ein totales Differential handeln.

Jedoch stellen wir fest, dass wegen

$$f_V(T, V) = 0, \quad g_T(T, V) = \frac{R}{V} \neq 0$$

kein totales Differential vorliegt

und es demzufolge auch keine solche Wärmefunktion $Q(T, V)$ geben kann.

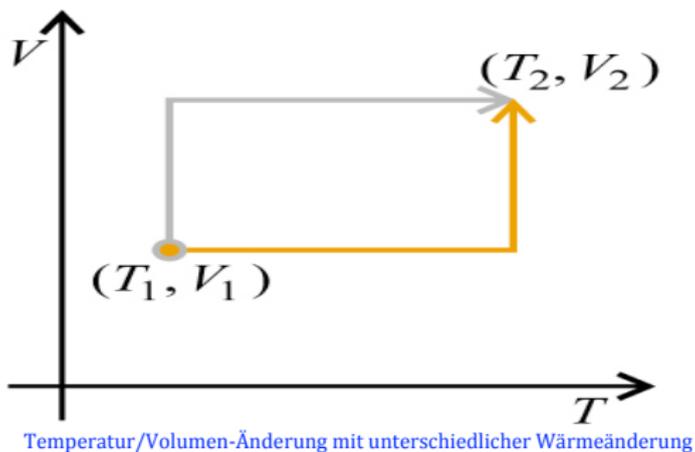
Wenn wir Volumen V und Temperatur T des Gases entlang einer Kurve C ändern, ist das Kurvenintegral

$$\int_C \partial Q = \int_C C_V dT + \frac{RT}{V} dV$$

in diesem Fall wegabhängig.

Im Allgemeinen macht es dabei also wohl einen Unterschied,

- ob wir ausgehend von T_1 und V_1 das Gas zuerst isotherm auf V_2 ausdehnen und dann bei konstantem Volumen V_2 auf T_2 erwärmen,
- oder ob wir umgekehrt das Gas bei konstantem Volumen V_1 auf T_2 erwärmen und dann das Volumen auf V_2 vergrößern.



Die Wärmeänderung $\int_C \partial Q$ auf diesen beiden Wegen ist in aller Regel verschieden.

Die Entropie S eines idealen Gases vom Volumen V bei einer Temperatur T ändert sich bei konstantem Volumen um

$$\partial S(T, V) = \frac{C_v}{T} \cdot dT,$$

wenn wir die Temperatur des Gases um einen kleinen Betrag dT ändern.

Lassen wir hingegen die Temperatur konstant und vergrößern das Volumen des Gases um dV , so zieht dies eine Entropieänderung um

$$\partial S(T, V) = \frac{R}{V} \cdot dV.$$

nach sich.

(C_v und R sind wieder Konstanten).

Insgesamt haben wir

$$\partial S(T, V) = \underbrace{\frac{C_v}{T}}_{=:f_1(T,V)} \cdot dT + \underbrace{\frac{R}{V}}_{=:f_2(T,V)} \cdot dV \quad (7.7.1)$$

Frage:

Gibt es eine von T und V abhängige Entropiefunktion $S(T, V)$, so dass es sich bei (7.7.1) um deren totales Differential in (T, V) handelt?

Die Existenz einer solchen Funktion $S(T, V)$ ist im Gegensatz zur nichtexistenten Wärmefunktion gesichert:

Denn wegen

$$\frac{\partial C_v}{\partial V} \frac{1}{T} = 0 = \frac{\partial R}{\partial T} \frac{1}{V}$$

liegt hier tatsächlich ein totales Differential vor.

Die Ausdrücke

$$f_1(T, V) := \frac{C_V}{T}, \quad f_2(T, V) := \frac{R}{V}$$

können dabei als Funktionen auf dem Rechteck

$$\mathcal{D} = \left\{ (T, V) \in \mathbb{R}^2 : 0 < T < \infty, 0 < V < \infty \right\}$$

aufgefasst werden.

Es ist dann

$$\begin{aligned} S(T, V) &= \int_1^T f_1(t, 1) dt + \int_1^V f_2(T, t) dt \\ &= \int_1^T \frac{C_\nu}{t} dt + \int_1^V \frac{R}{t} dt = C_\nu \ln T + R \ln V \end{aligned}$$

eine Stammfunktion $S(T, V)$ gegeben, welche die Entropie einer Gasportion vom Volumen V mit der Temperatur T angibt.

Wir können dann die Entropieänderung berechnen, wenn wir die Temperatur T und das Volumen V des Gases auf beliebige Weise,

d.h. entlang einer beliebigen Kurve C von

$$(T_1, V_1) \quad \text{auf} \quad (T_2, V_2)$$

ändern.

Es ist

$$\int_C \frac{C_\nu}{T} dT + \frac{R}{V} dV = S(T_2, V_2) - S(T_1, V_1) = C_\nu \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$