Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 7

11. Mai 2010

Kapitel 8. Vektoren

§8.2 Der $\mathbb{R}^n$ und seine Unterräume

Definition 76.

Betrachten wir eine beliebige endliche Anzahl von Vektoren

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$$

des $\mathbb{R}^n$, so können wir mit Hilfe von m Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$$

den Vektor

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \cdots + c_m \vec{v}_m$$

bilden. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$.

Lassen wir die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ unabhängig voneinander jeweils ganz $\mathbb{R}$ durchlaufen, so erhalten wir eine Menge aus unendlich vielen Vektoren des $\mathbb{R}^n$.

Definition 77.

Wir bilden zu den gegebenen Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ die Menge

$$\left\{ c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_m\vec{v}_m \mid c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R} \right\}$$

aller Linearkombinationen dieser Vektoren.

Wir bezeichnen diese als den von den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^n$ (bzw. die lineare Hülle der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$) und notieren diesen Raum als

$$\mathit{Span}\left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \right\}.$$

Bemerkungen.

- Die Menge der Vektoren $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$, welche den Unterraum aufspannen, wird in diesem Zusammenhang als Erzeugendensystem bezeichnet.

- Wie der Begriff „Unterraum“ suggeriert, handelt es sich bei

$$Span\,\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$$

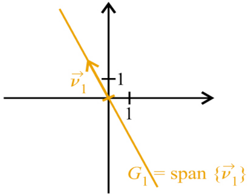
im Allgemeinen nur um eine Teilmenge des gesamten $\mathbb{R}^n$.

Wir betrachten den Unterraum

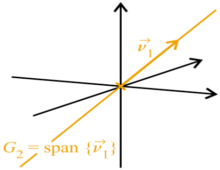
$$G = Span\left\{\vec{v}_1\right\} = \left\{c \cdot \vec{v}_1 \mid c \in \mathbb{R}\right\}$$

mit einem einzigen Vektor $\vec{v}_1$ aus dem $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

Als Vielfache des erzeugenden Vektors $\vec{v}_1$ liegen alle Vektoren des von $\vec{v}_1$ aufgespannten Unterraums G auf einer Geraden.



Erzeugte Gerade im $\mathbf{R}^2$



Erzeugte Gerade im $\mathbf{R}^3$

Bemerkungen.

- Beide Geraden G_1 und G_2 beinhalten den Ursprung. Dies ist ein typisches Merkmal eines jeden Unterraums.
- Wählen wir in

$$\left\{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_m\vec{v}_m \mid c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\right\}$$

als Koeffizienten speziell die Werte

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0,$$

so erhalten wir als Ergebnis den Nullvektor $\vec{0}$.

Bemerkungen (Fortsetzung).

- Im Fall $n = 2$ lässt sich die Gerade

$$G = Span\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R}\right\}$$

im Fall $a \neq 0$ auf die aus der Analysis bekannte Form $y = f(x) = mx + n$ bringen:

Zu gegebenem x nämlich gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$x = ca \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad y = cb = \frac{x}{a} \cdot b = \frac{b}{a}x.$$

Betrachten wir nun den Fall $n = 3$ und den Unterraum

$$E = Span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

mit zwei Vektoren $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ und $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ des $\mathbb{R}^3$.

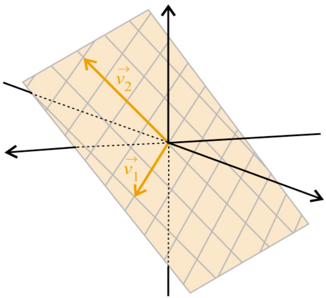
Bemerkung.

- $\boxed{\vec{v}_2 \neq c \cdot \vec{v}_1 \qquad \text{für alle} \quad c \in \mathbb{R}}$.

Der Unterraum

$$E = Span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2\}$$

repräsentiert im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene.



Von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aufgespannte Ebene

Jeden Ortsvektor $\vec{v}$ der Ebene E erhalten wir anschaulich dadurch,

dass wir ausgehend vom Ursprung „ein Stückchen“, nämlich c_1 Einheiten in Richtung des ersten Vektors

und daraufhin um c_2 Einheiten in Richtung des zweiten Vektors vorangehen.

Die Menge sämtlicher so gewonnener Ortsvektoren repräsentirert eine (den Ursprung beinhaltende) Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 8.2.1

Sei

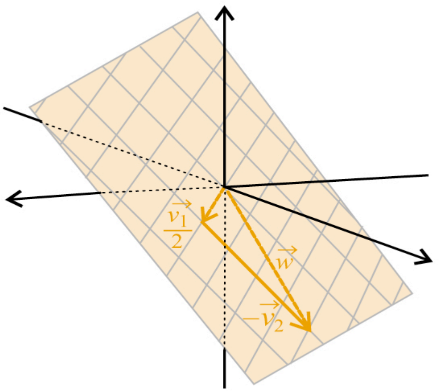
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = -1.$$

Als Beispiel ist der Vektor

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Beispiel 8.2.1 (Fortsetzung)



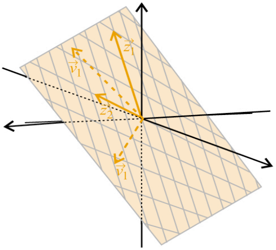
Von zwei Vektoren, erzeugte Ebene im $\mathbf{R}^3$

Bemerkung.

Das Erzeugendensystem

(also die Vektoren, welche einen Unterraum erzeugen bzw. aufspannen)

keinesfalls eindeutig bestimmt ist.



Anderes Erzeugendensystem – gleicher Unterraum

Wie Abbildung verrät, kann ein und derselbe Unterraum auch von einem andersartigen Vektorpaar

$$\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}$$

mit Vektoren $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$ der Ebene E aufgespannt werden.

Als eine Gemeinsamkeit der aus m Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ des $\mathbb{R}^n$ erzeugten Unterräume

$$Span\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right\} = \left\{c_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + c_m \cdot \vec{v}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

stellte sich heraus, dass der Nullvektor $\vec{0}$ in ihnen liegt.

Geometrisch betrachtet ist dies jedoch ein Spezialfall.

Um auch anders lokalisierte Geraden und Ebenen darstellen zu können,

geben wir uns einen festen Ortsvektor $\vec{s}$, genannt Stützvektor,

vor und heften an diesen den gewünschten Unterraum an, d.h. wir bilden

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{s} + Span\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right\}\\ &\quad = \left\{\vec{s} + c_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + c_m \cdot \vec{v}_m \mid c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}}$$

Eine solche Menge wird auch affiner Unterraum genannt.

Beispiel 8.2.2

Wir bewegen uns im $\mathbb{R}^3$, setzen

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und betrachten den Unterraum

$$U = Span\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beispiel 8.2.2 (Fortsetzung)

Der affine Unterraum

$$E = \vec{s} + U$$

besteht nun aus der Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

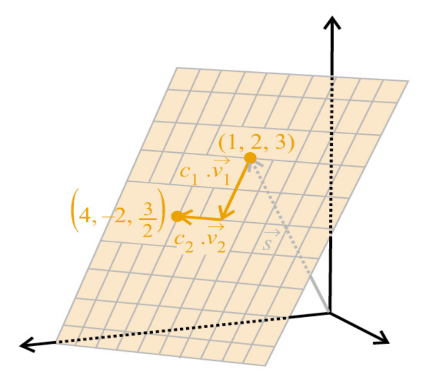
Beispiel 8.2.2 (Fortsetzung)

Wählen wir beispielweise $c_1 = -\frac{1}{2}$ und $c_2 = 2$, so erkennen wir, dass der Punkt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

in dieser affinen Ebene liegt.

Beispiel 8.2.2 (Fortsetzung)



Affine Ebene

Bemerkungen.

- Die Darstellung

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

einer affiner Ebene mit Hilfe eines Stützvektors und zweier Richtungsvektpren

ist nicht die einzige Möglichkeit eine solche mathematisch darzustellen.

Bemerkungen (Fortsetzung)

- Die Positionoerung einer Ebene im Raum lässt sich u.a. durch die Angabe eines Normalenvektors festlegen.

  Darunter versteht man einen Vektor

  $$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},$$

  der senkrecht auf der Ebene steht.

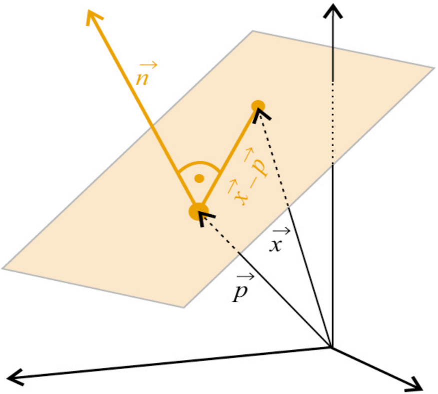
- Eine bloße Angabe des Normalenvektors jedoch würde die Ebene noch nicht eindeutig festlegen, denn zueinander parallele Ebenen besitzen den gleichen Normalenvektor.

Bemerkungen (Fortsetzung).

- Wir benötigen noch einen Punkt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

der auf der Ebene zu liegen hat.



Bestimmung einer Ebene mit Normale **n** und Punkt **p**.

Die affine Ebene beinhaltet genau die Punkte

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

für welche die Differenz der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{p}$ im rechten Winkel auf $\vec{n}$ steht, für welche also

$$(\vec{x} - \vec{p}) \bullet \vec{n} = 0$$

gilt.

Ausgeschrieben formuliert sich dies zu

$$\boxed{\begin{gathered}(x_1 - p_1) \cdot n_1 + (x_2 - p_2) \cdot n_2 + (x_3 - p_3) \cdot n_3 = 0 \\ \Leftrightarrow \\ n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 =: b.\end{gathered}}$$

Umgekehrt zeigt diese Rechnung, dass jede Gleichung der Form

$$\boxed{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = b}$$

eine Ebene im Raum darstellt mit einem Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},$$

wobei die Ebene durch jeden Punkt $\vec{p}$ geht, welcher die Gleichung

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = b$$

erfüllt.

Bemerkungen.

- Die Darstellung

$$U = \vec{s}_1 + Span\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$$

eines affinen Unterraums U des $\mathbb{R}^n$ mittels der Richtungsvektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ und die Stützvektors $\vec{s}_1 \in \mathbb{R}^n$ ist keinesfalls eindeutig.

- Für jeden Vektor $\vec{s}_2 \in \mathbb{R}^n$, welcher ebenfalls in U liegt, lässt sich U auch gleichwertig durch

$$U = \vec{s}_2 + Span\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$$

darstellen.

Bemerkungen (Fortsetzung)

- Darüber hinaus lässt sich auch der an $\vec{s}_1$ bzw. $\vec{s}_2$ angeheftete Unterraum

$$Span\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right\}$$

eines anderes Erzeugendensystems aufspannen.

Lineare Gleichungssysteme in Verbindung mit den Verfahren zu ihrer Lösung sind ein zentraler gegenstand der linearen Algebra.

Für den Moment wollen wir lediglich erklären, was es damit auf sich hat und auf elementare Schulkenntnisse zur Lösung dieser Systeme zurückgreifen.

Definition 78.

Unter einem linearen Gleichungssystem (LGS) mit m Zeilen und n Unbekannten verstehen wir die m Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & & & & & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{array}$$

- Bei den Koeffizienten a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) handelt es sich um vorgegebene reelle Zahlen mit zwei Indizies i und j.
- Der Index i, welcher innerhalb einer Gleichungszeile konstant bleibt, wird als Zeilenindex bezeichnet und bewegt sich zwischen den natürlichen Zahlen von 1 bis m.
- Dem gegenüber steht der zweite Index j, der so genannte Spaltenindex, welcher alle natürlichen Zahlen von 1 bis n durchläuft.

- Die so genannte rechte Seite des linearen Gleichungssystems besteht aus m vorgegebenen reellen Zahlen $b_1, \ldots, b_m$.

- Gilt speziell
$$b_1 = \cdots = b_m = 0,$$
so heißt das LGS homogen, anderfalls inhomogen.

- Die Bezeichnung linear rührt daher, dass die n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ nicht etwa in den Formen x_j^2 $\sqrt{x_j}$, $\ldots$ etc., sondern nur in erster Potenz $x_j = x_j^1$, eben linear, auftreten.

Definition 79.

Unter einer Lösung eines linearen Gleichungssystems verstehen wir n Zahlen

$$x_1, \ldots, x_n$$

welche allen m Gleichungen des LGSs genügen.

Bemerkung.

Eine solche Lösung muss nicht notwendigerweise existieren und ist im Fall ihrer Existenz auch nicht zwingend eindeutig bestimmt.

Um den Begriff der linearen Unabhängigkeit zu motivieren, betrachten wir die folgende Situation:

Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = Span\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} \right\},$$

$$U_2 = Span\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3} \right\}$$

Aufgrund des zusätzlichen Vektors $\vec{v}_3$ ist U_2 somit ein Unterraum, der gegebenfalls noch weitere Linearkombinationen enthält, die in U_1 nicht zu finden sind, oder mathematisch präziser:

$$\boxed{U_1 \subseteq U_2}.$$

Frage:

Ist aber der Raum U_2 wirklich größser?

Wir beobachten, dass

$$\vec{v}_3 = 2 \cdot \vec{v}_1 + 3 \cdot \vec{v}_2.$$

Betrachten wir nun einen beliebigen Vektor $\vec{v}$ aus U_2, dargestellt als Linearkombination

$$\begin{aligned}\vec{v} &= c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + c_3 \cdot \vec{v}_3 \\ &= c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + 2c_3 \cdot \vec{v}_1 + 3c_3 \cdot \vec{v}_2 \\ &= (c_1 + 2c_3) \cdot \vec{v}_1 + (c_2 + 3c_3) \cdot \vec{v}_2.\end{aligned}$$

Der Vektor $\vec{v} \in U_2$ ist auch eine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ und als solche eine Element aus U_1!

Jeder Vektor aus U_2 ist damit auch in U_1 enthalten, d.h. es ist

$$\boxed{U_2 \subseteq U_1}.$$

Insgesamt gilt

$$\boxed{U_1 = U_2}.$$

Wir interpretieren diesen Umstand folgendermaßen:

Beim Aufspannen des Raumes $U_1 = U_2$ stellt sich der Vektor $\vec{v}_3$ als „überflüssig" heraus, da er sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darstellen lässt.

$$\vec{v}_3 = 2 \cdot \vec{v}_1 + 3 \cdot \vec{v}_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \vec{v}_1 + 3 \cdot \vec{v}_2 - 1 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0},$$

so ist es in diesem Fall möglich, den Nullvektor als eine so genannte nichttriviale Linearkombination von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ darzustellen,

d.h. durch eine Linearkombination, deren Koeffizienten c_1, c_2, c_3 nicht allesamt zu null verschwinden.

Umgekehrt und allgemein für m Vektoren des $\mathbb{R}^n$ können wir also festhalten:

Sind die Vektoren

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$$

gegeben, so ist bei der Bildung von

$$Span\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\right\}$$

genau dann keiner der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ entbehrlich, wenn die Gleichung

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + c_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$$

nur trivial lösbar ist, wenn also

$$c_1 = \cdots = c_m = 0$$

die einzige Lösung darstellt.

Dass der Nullvektor eine Lösung darstellt, ist dabei klar.

Wichtig ist, dass die Wahl $c_1 = \cdots = c_m = 0$ die einzige Möglichkeit ist, den Nullvektor aus den gegebenen Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ zu kombinieren.

Vektoren, welche dieser Eigenschaft genügen, werden als linear unabhängig bezeichnet.

Definition 80. (Lineare (Un-)Abhängigkeit)

Gegeben seien die m Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des $\mathbb{R}^n$.

Die Vektoren heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + c_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$$

nur die Lösung $c_1 = \cdots = c_m = 0$ besitzt.

Anderfalls heißen die Vektoren linear abhängig.