Mathematik für Naturwissenschaftler II
SS 2010

Lektion 8

18. Mai 2010

Kapitel 8. Vektoren

§8.2 Der $\mathbb{R}^n$ und seine Unterräume (Fortsetzung)

Definition 80. (Lineare (Un-)Abhängigkeit)

Gegeben seien die m Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ des $\mathbb{R}^n$.

Die Vektoren heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$c_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + c_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$$

nur die Lösung $c_1 = \cdots = c_m = 0$ besitzt.

Anderfalls heißen die Vektoren linear abhängig.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen wichtigen Aussagen bezüglich der linearen Unabhängigkeit von Vektoren ab:

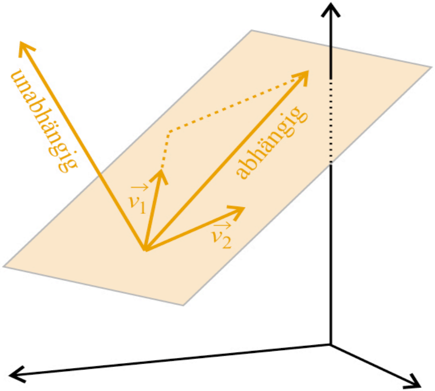
Satz 56.

- *Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie Vielfache voneinander sind.*
- *Im $\mathbb{R}^n$ sind $n+1$ oder mehr Vektoren stets linear abhängig.*
- *Beliebig viele Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ im $\mathbb{R}^n$ sind bereits dann linear abhängig, wenn eine Teilmenge hiervon linear abhängig ist. Die Umkehrung jedoch gilt nicht.*

Satz 56. (Fortsetzung)

- *Sind zwei der drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, also nicht Vielfache voneinander, so sind alle drei Vektoren linear abhängig, wenn sich der dritte Vektor dann in der Ebene, welche von den ersten beiden aufgespannt wurde, liegt.*

  Lineare Unabhängigkeit liegt hingegen vor, wenn die drei Vektoren nicht in einer Ebene liegen.



Lineare Unabhängigkeit im $\mathbf{R}^3$.

Definition 81. (Basis und Dimension)

Gegeben seien die m Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ *des* $\mathbb{R}^n$ *und es sei*

$$U = Span\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right\}.$$

Dann heißt die Menge $\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right\}$ *eine Basis von U, wenn die Vektoren* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ *linear unabhängig sind.*

Die Zahl m *bezeichnet man als die Dimension von U und notiert diese mit* $\dim U$.

Wie wir bereits festgestellt haben, kann ein Unterraum von den unterschiedlichen Erzeugendensystemen aufgespannt werden.

Folglich besitzt ein gegebener Unterraum auch beliebig viele Basen.

Unabhängig von der gewählten Basis jedoch ist die jeweilige Anzahl der in einer Basis enthaltenen Vektoren, sprich: seine Dimension, in jedem Fall dieselbe.

Satz 57. (Dimension von Unterräumen)

Gegeben seien m linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ und der von ihnen erzeugte Unterraum

$$U = Span\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right\}.$$

- *Liegen die m Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ ebenfalls in U und sind linear unabhängig, so spannen sie ebenfalls den Raum U auf.*
- *Die Dimension von U ist eindeutig bestimmt. Um ihn aufzuspannen, sind immer genau m linear unabhängige Vektoren aus U nötig.*

Bemerkung.

- Die Dimension ist damit unabhängig von der betrachteten Basis.
- Die Dimension ist vielmehr eine Größe, welche nur von dem Unterraum als solchem abhängt.

Das folgende Beispiel macht deutlich, wie man eine Basis eines Unterraums *U* bestimmt und seine Dimension ermittelt:

Beispiel 8.2.3.

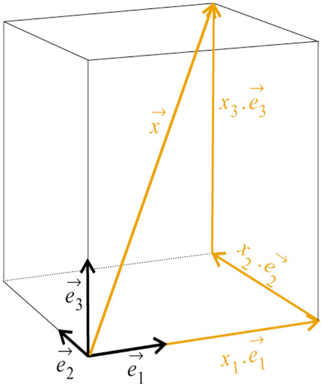
1. In einem Erzeugendensystem streichen wie sukzessive Vektoren, die sich als Linearkombination der anderen darstellen lassen.
2. Haben wir auf diese Weise hinreichend viele linear abhängige Vektoren entfernt, so gewinnen wir letztlich eine lineare unabhängige Menge von Vektoren, die den Unterraum *U* aufspannen und folglich eine Basis des Unterraum *U* bilden.
3. Abschließend zählen wir die Vektoren in dieser Basis ab und erhalten die Dimension von *U*.

§8.3 Basisdarstellungen

Als Standard-Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^n$ gebraucht man die Menge der kanonischen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor des $\mathbb{R}^n$ kann als Linearkombination dieser kanonischen Vektoren geschrieben werden.



Darstellung von $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ bezüglich der kanonischen Einheitsvektoren

Die entsprechenden reellen Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ der Linearkombination sind dabei gerade die Einträge des Vektors, d.h. es ist

$$\boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{e}_n.}$$

Eigenschaften.

- Die Vektoren der Menge $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ sind linear unabhängig und spannen den ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ auf.

  Somit bildet $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und es ist

  $$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

- Die Vektoren $\vec{e}_i$ besitzen allesamt die Länge 1.

- Die Vektoren $\vec{e}_i$ stehen senkrecht aufeinander, denn wir rechnen leicht nach, dass

  $$\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq j.$$

Definition 82.

Jede Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ des $\mathbb{R}^n$ oder eines Vektorraums, deren einzelne Basisvektoren orthogonal zueinander sind, wird als Orthogonalbasis bezeichnet.

Wir nennen diese verschärfend eine Orthonormalbasis, wenn es sich zusätzlich bei den Basisvektoren um Einheitsvektoren handelt.

Beispiel 8.3.1

Die Menge der kanonischen Einheitsvektoren

$$\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$$

repräsentiert eine ebensolche Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.

Betrachten wir wieder m linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ des $\mathbb{R}^n$ und den von ihren Vektoren aufgespannten m-dimensionalen Unterraum

$$U = Span\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\right\}.$$

Gegeben sei ferner ein Vektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

aus dem Unterraum U.

- Wir können den Vektor $\vec{w}$ einerseits als die Auflistung der Koeffizienten $w_1, \ldots, w_n$ interpretieren, mit denen sich der Vektor als Linearkombination der kanonischen Einheitsvektoren darstellen lässt:

$$\vec{w} = w_1 \cdot \vec{e}_1 + \cdots + w_n \cdot \vec{e}_n.$$

- Da $\vec{w}$ in U liegt und $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ eine Basis von U ist, lässt sich $\vec{w}$ andererseits auch als Linearkombination von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ darstellen.

  Diese Darstellung ist eindeutig.

Satz 58. (Eindeutige Darstellung)

Es seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und ferner sei $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor aus $U = Span\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$.

Dann besitzt $\vec{w}$ eine eindeutige Darstellung bezüglich der Basis $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$, d.h. es ist

$$\vec{w} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + c_m \cdot \vec{v}_m$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $c_1, \dots, c_m$, die auch als die Koordinaten von $\vec{w}$ bezüglich der Basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ bezeichnet werden.

Satz 58. (Fortsetzung)

Der Vektor $\vec{w}$ kann dann auch in der Form

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}_B$$

notiert werden.

§8.4 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Ausgehend von zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, die eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ aufspannen,

wollen wir einen Vektor konstruieren,

der auf allen Vektoren dieser Ebene senkrecht steht.

(Wir sagen auch: Der Vektor steht senkrecht auf E.)

Um dies bewerkstelligen zu können, führen wir den Begriff des Kreuzprodukts (oder auch Vektorprodukts) ein:

Definition 83.

Zwei Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ *werde durch*

$$\boxed{\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}}$$

ein dritter Vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ *zugeordnet.*

Satz 59.

Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann gilt:

- *Das Vektorprodukt ist eine antisymmetrische Operation, d.h. es gilt*
$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}.$$
- *Sind die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear abhängig, ist also ein Vektor als Vielfaches des anderen Vektors darstellbar, so gilt für das Kreuzprodukt*
$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}.$$

Satz 59. (Fortsetzung)

- *Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht sowohl auf $\vec{x}$ als auch auf $\vec{y}$, d.h. es gilt*

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \bullet \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \bullet \vec{y} = 0.$$

Kehren wir nun zu dem eingangs formulierten Problem zurück:

Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ des $\mathbb{R}^3$ und die von ihnen aufgespannte Ebene

$$E = Span\{\vec{x}, \vec{y}\} = \{c_1 \cdot \vec{x} + c_2 \cdot \vec{y} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir suchen einen Vektor $\vec{z}$, welcher senkrecht auf E steht.

Das Kreuzprodukt

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$$

leistet dabei das Gewünschte:

- Denn nach dem Satz 59 ist

$$\vec{z} \bullet \vec{x} = \vec{z} \bullet \vec{y} = 0.$$

- Da jeder Vektor $\vec{v} \in E$ zudem darstellbar ist als

$$\vec{v} = c_1 \cdot \vec{x} + c_2 \cdot \vec{y},$$

gilt nun mit den Rechenregeln auch

$$\vec{z} \bullet \left(c_1 \cdot \vec{x} + c_2 \cdot \vec{y}\right) = c_1 \cdot \left(\vec{z} \bullet \vec{x}\right) + c_2 \cdot \left(\vec{z} \bullet \vec{y}\right) = 0.$$

Ein Vektor, der auf eine Ebene senkrecht steht, wird auch als Normalenvektor oder Normale bezüglich dieser Ebene bezeichnet.

Beispiel 8.4.1.

Gegeben seien die Vektoren

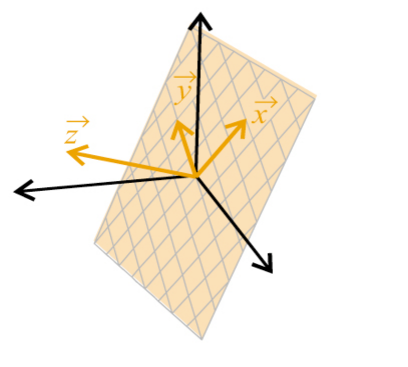
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$E = Span\{\vec{x}, \vec{y}\}$$

als die von ihnen aufgespannte Ebene.

Beispiel 8.4.1. (Fortsetzung)



Zum Kreuzprodukt

Beispiel 8.4.1. (Fortsetzung)

Der Vektor

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf dieser Ebene.

Bemerkung.

Selbstverständlich hätten wir im letzen Beispiel auch durch das Kreuzprodukt

$$\vec{y} \times \vec{x}$$

einen Normalvektor berechnen können.

In diesem Fall hätten wir ebenfalls einen Vektor erhalten, der senkrecht auf E steht, gegeüber dem oben berechneten Vektor

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$$

jedoch in die entgegengesetzte Richtung weist.