UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dominik Schillo, M.Sc.

Übungen zur Vorlesung
Minimalflächen
Wintersemester 2018/19

Blatt 3 **Besprechung:** 07.12.2018

Übung 1.
Sei
$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

(i) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gaußabbildung N von X.

Übung 2.
Zeigen Sie die *Parameterinvarianz des Flächeninhalts*: Seien $\Omega, \tilde{\Omega}$ zwei Gebiete, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierte Fläche, $\varphi\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus und $\tilde{X} = X \circ \varphi$. Dann gilt
$$\int_\Omega |X_u(u,v) \times X_v(u,v)| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\tilde{\Omega}} \left| \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \right| \,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{v}.$$

Übung 3.
Berechnen Sie die zweite Fundamentalform für Graphenflächen G_f, d.h. es sei $G_f = F(\Omega)$ mit $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))$ mit einer geeigneten Funktion f. Für $p \in S$ und $\xi, \eta \in T_pS$ ist
$$II_p(\xi,\eta) = -d\mathcal{N}_p(\xi)\cdot\eta \quad \text{mit} \quad \mathcal{N}(p) = N(F^{-1}(p)).$$
Seien $(u_0,v_0) \in \Omega, z, w \in \mathbb{R}^2$ und definiere $p = F(u_0,v_0)$ sowie $\xi = DF(u_0,v_0)z$ und $\eta = DF(u_0,v_0)w$.

(i) Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt
$$II_p(\xi,\eta) = -(DN(u_0,v_0)z)\cdot(DF(u_0,v_0)w).$$

(ii) Folgern Sie schließlich
$$II_p(\xi,\eta) = \left(\frac{D^2 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(u_0,v_0)z\right)\cdot w.$$