Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. M. Fuchs
Dr. Christian Tietz

Minimalflächen (WiSe 16/17)
Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit glattem Rand. Man beweise mit dem Satz von Gauß:

$$\int_\Omega \Delta u \eta \, dx = - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\eta \in C_0^1(\Omega)$. Mit $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ wird der Laplace-Operator bezeichnet.

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit glattem Rand. Außerdem sei $J(f) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy$, $\varepsilon > 0$ und f sowie ψ wie in der Vorlesung.
Zeigen Sie unter der Annahme

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon|_0} J(f + \varepsilon \psi)$$

die folgenden Aussagen:

(a) $\int_\Omega (1 + |\nabla f|^2)^{-\frac{1}{2}} \nabla f \cdot \nabla \psi dxdy = 0.$

(b) $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \equiv 0.$

(*Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Gauß.)

Aufgabe 3

Finden Sie alle Lösungen der Minimalflächengleichung

$$\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \equiv 0$$

mit der Gestalt $f(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$. Die Fläche heißt erste Scherck-Fläche. Zeigen Sie dazu zunächst, dass φ' und ψ' Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\lambda' = c(1+\lambda^2) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ sind.}$$

Abgabe: keine.