Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Yana Kinderknecht
SoSe 2017

Operatorhalbgruppen, Markovsche Prozesse und Evolutionsgleichungen

Übungsblatt 3 (14 Punkte)

Abgabe: Vor der Vorlesung, 19.06.2017.

Aufgabe 6. (3+3=6 Punkte)

Betrachte den Banachraum $C_\infty(\mathbb{R}^d) := \left\{\varphi \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0\right\}$ mit der Supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Sei $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $v \in C(\mathbb{R}^d)$. Betrachte der *Multiplikationsoperator* $(V, \mathrm{Dom}(V))$ mit $(V\varphi)(x) := v(x)\varphi(x)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Dom}(V) := \{u \in C_\infty(\mathbb{R}^d) : vu \in C_\infty(\mathbb{R}^d)\}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

(a) Zeige, dass der Multiplikationsoperator $(V, \mathrm{Dom}(V))$ abgeschlossen und dicht definiert ist.

(b) Sei v nach oben beschränkt, d.h. $\exists\, C > 0 : \sup_{x\in\mathbb{R}^d} v(x) \le C$. Betrachte die Opertoren $(T_v(t))_{t\ge 0}$ mit $(T_v(t)\varphi)(x) := e^{tv(x)}\varphi(x)$. Zeige, dass die *Multiplikationshalbgruppe* $(T_v(t))_{t\ge 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist und finde den Erzeuger.

Aufgabe 7. (4+4=8 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Definiere die *Translationshalbgruppe* $(T_b(t))_{t\ge 0}$ durch die Formel $(T_b(t)\varphi)(x) := \varphi(x + tb)$ auf den Banachräumen

(a) $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ mit der Supremumnorm $\|\cdot\|_\infty$;

(b) $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, mit der L^p-Norm.

Für jeden Banachraum:

- Zeige, dass $(T_b(t))_{t\ge 0}$ eine stark stetige Halbgruppe ist;
- Finde einen wesentlichen Bereich des Erzeugers und bestimme den Erzeuger.

Hinweise: Benutze die Taylor-Entwicklung; $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist eine Teilmenge der Menge aller gleichmäßig stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$.

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:
https://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/OHGMPEG/index.html