Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. Yana Kinderknecht
SoSe 2017

Operatorhalbgruppen, Markovsche Prozesse und Evolutionsgleichungen
Übungsblatt 5, freiwillig (16 Zusatzpunkte)

Abgabe: Vor der Vorlesung, 24.07.2017.

Aufgabe 11. (2+2+2=6 Punkte)

a) Für die Wärmeleitungshalbgruppe (oder Brownsche Halbgruppe) auf dem Raum $C_\infty(\mathbb{R}^1)$ und für $\lambda > 0$ finde R_λ in der Form eines Integraloperators.

b) Sei $b > 0$. Für die Translationshalbgruppe $(T_b(t))_{t\geq 0}$ (vgl. Aufgabe 7) auf dem Raum $C_\infty(\mathbb{R}^1)$ und für $\lambda > 0$ finde R_λ in der Form eines Integraloperators.

Hinweis: Finde die Fouriertransformation der Funktion $f(x) = e^{-x}\chi_{[0,+\infty)}$, wobei χ_A die Indikatorfunktion der Menge A ist.

c) Sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Für die Multiplikationshalbgruppe $(T_v(t))_{t\geq 0}$ (vgl. Aufgabe 6) auf dem Raum $C_\infty(\mathbb{R}^1)$ und für λ mit $|\lambda| > \|v\|_\infty$ finde R_λ.

Aufgabe 12. (2+2+2=6 Punkte)

Finde (für (a) und (b) in der Form eines Integraloperators) die Yosida-Approximationen für Erzeuger folgender Halbgruppen auf $C_\infty(\mathbb{R}^1)$:

a) Für die Wärmeleitungshalbgruppe (oder Brownsche Halbgruppe).

b) Für die Translationshalbgruppe $(T_b(t))_{t\geq 0}$, wobei $b > 0$.

c) Für die Multiplikationshalbgruppe $(T_v(t))_{t\geq 0}$, wobei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist und $|\lambda| > \|v\|_\infty$ gilt.

Aufgabe 13. (2+2=4 Punkte)

Sei $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise unabhängiger identisch verteilter $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen. Sei $\eta := P_{Z_k}$ ihre Verteilung. Sei $Z_0 := 0$ f.s. Betrachte einen eindimensionalen Poisson-Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ mit Intensität λ und Sprunghöhe 1, der von allen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist. Man definiert einen *zusammengesetzten Poisson-Prozess* $(X_t)_{t\geq 0}$ als

$$X_t := \sum_{k=0}^{N_t} Z_k.$$

a) Zeige, dass das folgende gilt:

$$\mathbb{E}\left[e^{-ix\cdot X_t}\right] = \exp\left[-t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(1 - e^{-ix\cdot y}\right)\lambda\,\eta(dy)\right].$$

b) Finde die Lévy Charakteristiken (c, b, A, ν) von $(X_t)_{t\geq 0}$ (Also: $(X_t)_{t\geq 0}$ ist ein Lévy-Prozess). *Hinweis:*

$$\mathcal{F}\left[P_{X_t}\right](x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot y} P_{X_t}(dy) = (2\pi)^{-d/2} \mathbb{E}\left[e^{-ix\cdot X_t}\right].$$

Die Übungsblätter sind auf unserer Homepage erhältlich:
https://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/OHGMPEG/index.html