Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 9

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 28.1.2019.

Aufgabe 1.

Seien Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $u \in C(\overline{\Omega})$ eine in Ω subharmonische Funktion. Zeigen Sie, dass **entweder**

- $u(x) < \max\limits_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \qquad$ für alle $x \in \Omega$

oder

- u konstant auf $\overline{\Omega}$ gilt.

[Hinweis: Verwenden Sie eine zum Beweis von Satz 2.1 ähnliche Argumentation. Zerlegen Sie Ω in die Mengen

$$\Omega^+ = \left\{ x \in \Omega : u(x) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \right\}, \qquad \Omega^- = \left\{ x \in \Omega : u(x) < \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \right\}$$

und zeigen Sie, dass die Mengen $\Omega^{+,-}$ offen sind.]

Aufgabe 2.

Seien Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und äußerer Normalen $\mathcal{N}$ und der Operator L sei elliptisch auf Ω mit $c \leq 0$, es gelte $a_{ii}/\lambda, b_i/\lambda, c\lambda \in L^\infty(\Omega)$ für $i = 1, \ldots, n$. Weiter seien $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu = Lv \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_{\mathcal{N}} u = \partial_{\mathcal{N}} v \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie, dass $u - v = k$ in Ω für ein $k \in \mathbb{R}$ gilt und falls es ein $x_0 \in \Omega$ mit $c(x_0) < 0$ gibt, $k = 0$ ist.

Aufgabe 3.

Seien X, Y Banachräume, $L_0, L_1 : X \to Y$ stetige lineare Operatoren, $L_t : X \to Y$ durch

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

definiert, es gibt ein $C > 0$ mit

$$||x||_X \leq ||L_t x||_Y$$

für alle $x \in X$ und $t \in [0,1]$ und die Abbildung L_s ist surjektiv für ein $s \in [0,1]$.

(i) Zeigen Sie, dass es eine lineare inverse Abbildung $L_s^{-1} : Y \to X$.

(ii) Bestimmen Sie ein $\delta > 0$, sodass die Abbildung $T : X \to X$ mit

$$Tx = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$$

für alle $y \in Y$ und t mit $|s-t| < \delta$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$L_t x = y$$

für alle $y \in Y$ und t mit $|s-t| < \delta$ eine eindeutige Lösung $x \in X$ hat.

(iv) Folgern Sie, dass die Abbildung $L_t : X \to Y$ surjektiv für alle $t \in [0,1]$ ist.

(v) Folgern Sie, dass die Abbildung L_0 genau dann surjektiv ist, wenn L_1 surjektiv ist.