Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 2

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 12.11.2018.

Aufgabe 1.

Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch und nach oben beschränkt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = u_x(x, y) - \mathrm{i}u_y(x, y)$$

für $z = x+\mathrm{i}y$ eine holomorphe Funktion ist und folgern Sie, dass es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f) = u$ gibt.

b) Beweisen Sie, dass u konstant ist. [Hinweis: Verwenden Sie den *Satz von Liouville*.]

Aufgabe 2.

Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch und ihre partiellen Ableitungen nach x und y beschränkt. Zeigen Sie, dass u eine *affin-lineare* Funktion ist, d. h. es gibt Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$u(x, y) = ax + by + c$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ offen und beschränkt und wir betrachten die Funktionenklasse

$$\mathcal{C} := \{u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

und für ein $k \in \mathbb{N}$ das Energiefunktional $J : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u|^{2k} + u^{2k}\right) \mathrm{d}x.$$

a) Zeigen Sie, dass $\inf_{u\in\mathcal{C}} J(u)$ existiert.

b) Zeigen Sie, dass eine Lösung u des Variationsproblems $J \to \min$ in $\mathcal{C}$ auch eine Lösung zum Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{2(k-1)}\nabla u\right) - u^{2k-1} &= 0 \qquad && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 4.

Zeigen Sie, dass die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad && 0 < x < a,\ 0 < y < b, \\ &u(0,y) = 0, && 0 < y < b, \\ &u(a,y) = 0, && 0 < y < b, \\ &u(x,0) = 0, && 0 < x < a, \\ &u(x,b) = U, && 0 < x < a, \end{aligned}$$

wobei a, b und U positive Konstante sind, durch die Formel

$$u(x,y) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh(2n+1)\frac{\pi y}{a}}{\sinh(2n+1)\frac{\pi b}{a}} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{a}}{(2n+1)}$$

gegeben ist. [Hinweis: Verwenden die die Methode Trennung der Variablen.]