Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 3

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 19.11.2018.

Aufgabe 1.

Seien die Distribution A von der Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induziert und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Heaviside-Funktion* mit

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die von h induzierte Distribution H und zeigen Sie, dass für ihre Ableitung H' im Sinne der Distributionen $H' = \delta_0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $A' = -1 + 2H$ und $A'' = 2\delta_0$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ einmal schwachdifferenzierbar und nicht zweimal schwachdifferenzierbar ist.

[Hinweis: Die *Diracsche Delta-Distribution* $\delta_0 : C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ ist die durch die Formel

$$\delta_0(\phi) = \phi(0)$$

definierte Distribution.]

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass Hölder-stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Exponenten α mit $\alpha > 1$ konstant sind.

Aufgabe 3.

Es seien f eine n-dimensionale Distribution und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor. Finden Sie Ausdrücke für die Fourier-Transformierten von $\tau_{\mathbf{y}} f$, $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} f$, $\partial_{x_i} f$ und $x_i f$, $i = 1, \ldots, n$ als Funktionen der Fourier-Transformierten $\hat{f}$ von f, wobei $\tau_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ ist.

Berechnen Sie

(i) die n-te Ableitung der eindimensionalen Diracschen Delta-Distribution $\delta(x)$;

(ii) die Fourier-Transformierte der eindimensionalen Distribution, die durch die Funktion x^n definiert ist.