Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 4

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 26.11.2018.

Aufgabe 1.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand und wir betrachten das *Dirichlet-Problem* zur *Poisson-Gleichung*

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = u_0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{1}$$

für Funktionen $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, wobei $f \in C^0(\Omega)$ und $u_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ vorgegeben sind. Zeigen Sie, dass eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eindeutig ist.

[Hinweis: Beweisen Sie die Aussage mittels der sogenannten *Energieintegral-Methode*. Betrachten Sie dazu die Funktion $w = u - v$, wobei $v \in C^2(\overline{\Omega})$ eine weiteren Lösung des Randwertproblems (1) ist. Multiplizieren Sie die Laplace-Gleichung für w mit w selbst und wenden Sie den Satz von Gauß an, um das Integral

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(w\nabla w)\mathrm{d}x$$

zu untersuchen.]

Aufgabe 2.

Seien $n \geq 2$, $a > 0$, $B_a(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\overline{B}_a(x_0))$ und

$$\overline{u}_a(x_0) = \fint\limits_{\partial B_a(x_0)} u(z)\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(z) = \underbrace{\frac{1}{n\omega_n a^{n-1}}}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{von } \partial B_a(x_0)}} \int\limits_{\partial B_a(x_0)} u(z)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(z)$$

der Mittelwert von u über $\partial B_a(x_0)$, wobei $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$ das Volumen von $B_1(0)$ ist.

Zeigen Sie, dass

(i) $\displaystyle\int_{\partial B_a(x_0)} \partial_{\mathcal{N}} u(z) d\mathcal{H}^{n-1}(z) = 0$ für in $B_a(x_0)$ harmonische Funktionen u,

(ii) $u(x_0) = \overline{u}_a(x_0)$ für in $B_a(x_0)$ harmonische Funktionen u,

(iii) $u(x_0) \leq \overline{u}_a(x_0)$ für in $B_a(x_0)$ subharmonische Funktionen u,

(iv) $u(x_0) \geq \overline{u}_a(x_0)$ für in $B_a(x_0)$ superharmonische Funktionen u.

[Hinweis: Verwenden Sie für Aufgabenteil (i) den Satz von Gauß und für (ii) das folgende Resultat aus der Vorlesung.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit genügend glattem Rand sowie $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Omega} [u(z)\partial_{\mathcal{N}}\Gamma(x-z) - \partial_{\mathcal{N}} u(z)\Gamma(x-z)]\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(z) + \int_{\Omega} \Delta u(z)\, \Gamma(x-z)\, \mathrm{d}z = U(x)$$

mit

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ u(x)/2, & x \in \partial\Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n - \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Hier ist Γ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung mit

$$\Gamma(x) = c_n \begin{cases} \log|x|, & n = 2, \\ \\ |x|^{2-n}, & n > 2 \end{cases} \quad \text{mit} \quad c_n = \begin{cases} (2\pi)^{-1}, & n = 2, \\ \\ -(n(2-n)\omega_n)^{-1}, & n > 2 \end{cases}$$

und $\mathcal{N}$ das äußere Einheitsnormalenfeld an $\partial\Omega$.]

Aufgabe 3.

Seien Ω ein beschränktes Gebiet, u_1, $u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ in Ω subharmonische Funktionen und $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine in Ω harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass

(i) $\max(u_1, u_2)$ subharmonisch in Ω ist,

(ii) $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| = \max\limits_{x\in\partial\Omega} |u(x)|$.

Aufgabe 4.

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die einzige Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = u^3 \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

die triviale Lösung ist.