Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 5

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 3.12.2018.

Aufgabe 1.

Seien $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ durch die Formel

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2x + x^2 + y^2}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass u auf $B_1(0)$ harmonisch ist.

b) Gilt das Maximumsprinzip für die Funktion u auf $\overline{B_1}(0)$?

Aufgabe 2.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$$

definiert. Zeigen Sie, dass jede Komponente von ϕ für $n = 2$ harmonisch ist und für $n \geq 3$ nicht.

Aufgabe 3.

Seien $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ und betrachten Sie das Dirichlet Problem

$$\Delta v = 0, \quad x \in \Omega, \qquad\qquad v(x) = 1, \quad |x| = 1.$$

Finden Sie eine Lösung mithilfe der *Kelvin Transformation*. Ist die Lösung dieses Randwertproblems eindeutig?

[Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die eindeutige Lösung des inneren Problems mit dem *Poisson Integral* (siehe dazu Satz 2.2 der Vorlesung).]

Aufgabe 4.

Seien $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta \left(\frac{a^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \right) = 0$$

für $|x| < a$ und $|y| = a$ gilt.