Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2018/2019)
Blatt 9

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 21.1.2019.

Aufgabe 1.

Betrachten Sie den Differentialoperator $L = \partial_x^2 + x\partial_y^2$ auf $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass L

(i) elliptisch, aber nicht gleichmäßig elliptisch auf Ω ist,

(ii) lokal gleichmäßig elliptisch auf Ω ist.

Aufgabe 2.

Seien Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ eine nichttriviale Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = \lambda u \ \text{ in } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ auf } \ \partial\Omega$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lambda < 0$ gilt.

Aufgabe 3.

Seien Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, der Differentialoperator

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i\partial_i + c, \qquad a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$$

elliptisch auf Ω und für $u \in C^2(\Omega)$ gilt die Ungleichung $Lu(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in \Omega$ mit $c(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass u in x_0 keine lokale Maximalstelle hat.

[Hinweis: Seien A, B symmetrische $(n \times n)-$Matrizen. Falls A positiv definit und B negativ semidefinit ist, dann ist $\operatorname{spur}(AB) \leq 0$.]

Aufgabe 4.

(i) Seien $\Omega = (-1,1)^2 \setminus \{(0,0)\}$ und

$$L = \Delta - \frac{\partial_x}{x} - \frac{\partial_y}{y}.$$

Zeigen Sie, dass es $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $u \neq v$ und $Lu = Lv$ in Ω sowie $u = v$ auf $\partial\Omega$ gibt.

(ii) Seien $\Omega = (0, 2\pi)^2$ und

$$L = \Delta + 5.$$

Zeigen Sie, dass es $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $u \neq v$ und $Lu = Lv$ in Ω sowie $u = v$ auf $\partial\Omega$ gibt.