Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 1

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 06.05.2019.

Aufgabe 1

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Der Raum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ ist ein Banach-Raum bezüglich der Supremumsnorm.

(ii) Der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ ist ein Banach-Raum bezüglich der Norm

$$\|u\|_{\text{lip}} := |u(0)| + \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}} \left| \frac{u(s)-u(t)}{s-t} \right|.$$

(iii) Der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ ist ein Banach-Raum bezüglich der Norm

$$\|u\|_{1,\infty} := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

(iv) Der Raum $C^k(\overline{\Omega})$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist ein Banach-Raum bezüglich der Norm

$$||u|| := \begin{cases} \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0^n, ||\nu||\leq k} ||\partial^\nu u||_\infty, & k \in \mathbb{N}_0 \\ \max\limits_{\nu\in\mathbb{N}_0^n} ||\partial^\nu u||_\infty, & k = \infty \end{cases},$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt ist.

[Hinweis: Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(u_m) \subset C^1(\Omega)$ eine Folge mit

$$u_m \xrightarrow{m\to\infty} u \quad \text{und} \quad \partial_\alpha u_m \xrightarrow{m\to\infty} v$$

gleichmäßig in Ω für ein $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$, so existiert $\partial_\alpha u$, und es ist $v = \partial_\alpha u$.]

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass der Raum $C^1[a,b]$ der reellwertigen stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$ nicht vollständig bezüglich der Supremumsnorm ist.

b) Zeigen Sie, dass $\overline{B_1(0)} \subset X$ für

$$\text{(i) } X = C([0,1]), \qquad \text{(ii) } X = L^2(\mathbb{R})$$

nicht kompakt ist.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $l^2(\mathbb{N})$ auf Beschränktheit und Kompaktheit.

(i) $A := \left\{ u \in l^2(\mathbb{N}) : |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$,

(ii) $B := \left\{ u \in l^2(\mathbb{N}) : ||u||_2 \leq 1 \right\}$,

(iii) $C := \left\{ u \in l^2(\mathbb{N}) : |u_n| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 4

Es seien $1 \leq p < q \leq \infty$ und Ω eine messbare, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie:

(i) $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ und $\|f\|_p \leq (\sigma(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$ für alle $f \in L^q(\Omega)$,

(ii) $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ für alle $f \in L^\infty(\Omega)$.