Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 3

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 27.05.2019.

Aufgabe 1

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es sei $\{x_n\}$ eine Folge in einem normierten Raum X.

   1. Ist $\{x_n\}$ schwach konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig.

   2. $x_n \to x$ für $n \to \infty$ impliziert $x_n \rightharpoonup x$ für $n \to \infty$.

b) Es seien X ein endlichdimensionaler normierter Raum und $\{x_n\}$ eine schwach konvergente Folge in X. Dann ist $\{x_n\}$ auch stark konvergent.

c) Die durch die Formel $f_n(x) = \sin(nx)$ definierte Folge im Raum $L^p(0, 2\pi)$ für $p \in (1, \infty)$ konvergiert schwach und nicht stark gegen 0.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist X unendlichdimensional und reflexiv, so hat X die Schur-Eigenschaft nicht.

   [Hinweis: Ein normierter Raum X hat die *Schur-Eigenschaft*, falls

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Rightarrow \qquad x_n \to x.$$

   Konstruieren Sie eine Folge $\{x_n\}$ mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightharpoonup 0$ für $n \to \infty$.]

b) Jeder Hilbertraum die Radon-Riesz-Eigenschaft hat.

   [Hinweis: Ein normierter Raum hat die *Radon-Riesz-Eigenschaft*, falls

$$x_n \rightharpoonup x, \; \|x_n\| \to \|x\| \qquad \Rightarrow \qquad x_n \to x.]$$

c) Sei X ein gleichmäßig konvexer normierter Raum. Dann hat X die Radon-Riesz-Eigenschaft.

[Hinweis: Ein normierter Raum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls alle Folgen $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ im Einheitskreis die Eigenschaft

$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| \to 1 \qquad \Rightarrow \qquad \|x_n - y_n\| \to 0$$

für $n \to \infty$ haben.]

Aufgabe 3

a) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere, konvexe und abgeschlossenen Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, dass es Elemente $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\nu \in S^{n-1}$ gibt, so dass

$$(x - \xi) \cdot \nu \geq 0$$

für $x \in A$ und

$$(x - \xi) \cdot \nu \leq 0$$

für $x \in B$ gilt.

b) Beweisen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so gibt es zu $\xi \in \partial\Omega$ einen Vektor $\nu \in S^{n-1}$, so dass $(x - \xi) \cdot \nu \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ ist.

[Hinweise: Wenden Sie in a) auf die Mengen $A_m := A \cap \overline{B_m(0)}$ sowie $B_m := B \cap \overline{B_m(0)}$ mit $m \in \mathbb{N}$ das abstrakte Variationsprinzip an. Betrachten Sie in b) eine gegen ξ konvergente Folge in $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$.]

Aufgabe 4

Seien X ein Banachraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist X ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so ist X reflexiv.

[Hinweis: Es gilt $\dim X = \dim X^*$.]

b) Ist X reflexiv, so ist U reflexiv.

c) Ist X ein Hilbertraum, so ist X reflexiv.

d) X ist genau dann reflexiv,wenn X^* reflexiv ist.