Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 7

Abgabe: vor der Vorlesung am Mittwoch, 19.06.2019.

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgenden Sätze.

1. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset \Omega$ und für ein $\varepsilon > 0$ sei

$$K_\varepsilon := \Big\{ x \in \mathbb{R}^d ;\, \operatorname{dist}(x, \Omega) < \varepsilon \Big\}$$

die äußere Parallelmenge zu Ω im Abstand ε. Dann gelten die folgenden Aussagen für Funktionen $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

(i) $$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_K J_\varepsilon(u) \leq \operatorname*{ess\,sup}\limits_{K_\varepsilon} u \\ \inf\limits_K J_\varepsilon(u) \geq \operatorname*{ess\,inf}\limits_{K_\varepsilon} u \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \|J_\varepsilon(u)\|_{L^\infty(K)} \leq \|u\|_{L^\infty(K_\varepsilon)}.$$

(ii) Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit $p \in [1, \infty]$, so ist auch $J_\varepsilon(u) \in L^p_{loc}(\Omega)$ und

$$\|J_\varepsilon(u)\|_{p;\,\Omega} \leq \|u\|_{p;\,K_\varepsilon},$$

falls $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $K_\varepsilon \Subset \Omega$ ist.

(iii) Ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$, so ist $J_\varepsilon(u) \in W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)$ und es gilt:

$$\|J_\varepsilon(u)\|_{k,p;\,\Omega_\varepsilon} \leq \|u\|_{k,p;\,\Omega}.$$

(iv) Ist $u \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $J_\varepsilon(u) \in C^k(\Omega_\varepsilon)$ und es gilt:

$$\|J_\varepsilon(u)\|_{C^k(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u\|_{C^k(\Omega)}.$$

(v) Ist $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ für ein $\alpha \in (0, 1]$, so ist $J_\varepsilon(u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ mit kontrollierter Hölder–Konstante, i. e.:

$$[J_\varepsilon(u)]_{\alpha;\,\Omega_\varepsilon} \leq [u]_{\alpha;\,\Omega}.$$

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

   (i) Ist $u \in C^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt:

   $$\partial^\gamma J_\varepsilon(u) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \partial^\gamma u$$

   lokal gleichmäig auf Ω für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\gamma| \leq k$.

   (ii) Ist $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0,1]$, so bleiben die Hölder–Normen sämtlicher Ableitungen von u bis zur Ordnung k beschränkt, es liegt allerdings keine lokale Konvergenz in der $C^{k,\alpha}$–Norm vor.

   (iii) Ist $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ mit einem $1 \leq p < \infty$, so gilt:

   $$J_\varepsilon(u) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } L^p_{loc}(\Omega).$$

   Ist $u \in L^p(\Omega)$ mit einem $1 \leq p < \infty$, Ω beschränkt und bezeichnet $\bar{u}$ die Fortsetzung von u durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$, so gilt:

   $$\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } L^p(\Omega).$$

   (iv) Ist $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$, so gilt:

   $$J_\varepsilon(u) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$

[Hinweis: Seien $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\varphi \in C^\infty_\circ(\mathbb{R}^d)$ ein glättender Kern auf $\mathbb{R}^d$. Dann ist $J_\varepsilon(u) : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ die Faltung $J_\varepsilon(u) := u * \varphi_\varepsilon$, die gegeben ist durch

$$J_\varepsilon(u)(x) := \int\limits_\Omega \varphi_\varepsilon(z-x)\, u(z)\, dz = \int\limits_{B_\varepsilon(x)} \varphi_\varepsilon(z-x)\, u(z)\, dz.$$

Satz von Meyers und Serrin

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

i) Zu jedem $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m) \subset C^\infty_0(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega).$$

ii) $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$, d. h. zu jedem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_m) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit

$$u_m \xrightarrow{m} u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

(Satz von Meyers und Serrin, kurz: „$H = W$“).

Aufgabe 2

Beweisen Sie den Satz von Meyers und Serrin, indem Sie folgende Aussagen zeigen.

i) Sei (Ω_m) eine kompakte Ausschöpfung von Ω, so dass $\Omega_m \Subset \Omega_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt. Zu jedem m wählen wir eine Abschneidefunktion $\eta_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\eta_m \equiv 1$ in $\overline{\Omega_m}$ und $\mathrm{spt}\eta_m \subset \Omega_{m+1}$. Dann gibt es eine Nullfolge $(\varepsilon_m) \subset (0, \infty)$, sodass die Folge (u_m) mit

$$u_m := \begin{cases} \eta_m \, J_{\varepsilon_m}(u) & \text{auf} \quad \Omega_{m+1} \\ 0 & \text{auf} \quad \Omega \setminus \Omega_{m+1} \end{cases}$$

das Gewünschte leistet.

ii) Seien (Ω_m) wie in i), (A_m) für $m \in \mathbb{N}_0$ die „Ringe“

$$A_m := \Omega_{m+1} \setminus \overline{\Omega}_{m-1} \quad \text{mit} \quad \Omega_0 := \Omega_{-1} := \emptyset.$$

und $(\eta_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ eine Zerlegung der Eins bzgl. (A_m). Zu vorgegebenem $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ ist $v := \sum_{m=0}^\infty J_{\varepsilon_m}(v_m)$ eine Funktion mit

$$v \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|u - v\|_{k,p} < \varepsilon,$$

wobei $v_m := \eta_m \, u \in W^{k,p}(\Omega)$ und (ε_m) eine geeignete Nullfolge ist.