Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen II (SoSe 2019)
Blatt 8

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 01.07.2019.

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < p < \infty$ und $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{D}[w] := \int_\Omega |\nabla w|^p dx$$

in der Menge $u_0 + \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_0(\Omega)$ ein eindeutiges Minimum besitzt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

i) Zeigen Sie, dass jede Minimalfolge des Problems eine in $W^{1,p}$ schwach konvergente Teilfolge besitzt.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm, dass der in (a) erhaltene Limes das Minimierungsproblem löst und zeigen Sie die Eindeutigkeit.

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz-Rand, sowie $1 \leq p \leq \infty$.

i) Zeigen Sie, dass eine stetige lineare Abbildung $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\mathcal{H}^{n-1}, \partial\Omega)$ existiert. Benutzen Sie dabei die Ungleichung

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \left\{ \int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega |\nabla u|^p dx \right\}$$

für $1 \leq p < \infty$ und Funktionen $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $C > 0$ und betrachten Sie eine Funktionenfolge $(u_m) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$ bei $m \to \infty$.

ii) Sei $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_0(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $Tu = u_0$ ist.