Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Yana Kinderknecht

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I (WS 2013/2014)
Blatt 10 (16 Punkte)

Abgabe: vor der Vorlesung am Montag, 20.01.2014.

Versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen. Mit einem (⊛) gekennzeichnete Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet; die restlichen Aufgaben sind in schriftlicher Form abzugeben.

Aufgabe 38. (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $w := w_\xi$ eine *lokale Bariere* in einem Punkt $\xi \in \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass es in ξ eine *globale Bariere* gibt. *Hinweis:* Sei $B_r(\xi)$ eine Kugel, sodass w bzgl. $B_r(\xi)$ eine globale Bariere ist. Betrachten Sie die Funktion $\widetilde{w}_\xi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} \min\{w(x), \gamma\}, & x \in \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(\xi), \\ \gamma, & sonst, \end{cases}$$

wobei $\gamma := \inf\{w(x) \,:\, x \in \overline{\Omega} \cap \overline{A}_r(\xi)\} > 0$ und $A_r(\xi) := B_r(\xi) - \overline{B}_{r/2}(\xi)$ sind.

Aufgabe 39. (2 Punkte)

Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Finden Sie die Perron-Funktion für das Dirichlet Randwertproblem $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u = 1 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$ Ist dieses Randwertproblem (im Raum $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$) korrekt gestellt? Begründen Sie die Antwort.

Aufgabe 40. (3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgende Funktionen auf der gegebenen Gebiete sub/superharmonisch sind.

a) **(1 Punkt)** $u(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n, \quad \Omega = \mathbb{R}^n$.

b) **(1 Punkt)** $u(x_1, \ldots, x_n) = |x_1|, \quad \Omega = \mathbb{R}^n$.

c) **(1 Punkt)** $u(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[4]{x_1 + \ldots + x_n} - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \quad \Omega = B_1(x^0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $x^0 := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Seien u, $g(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ für alle $x \in \Omega$. Sei $g(x, \cdot)$ für alle $x \in \Omega$ harmonisch. Die Fundamentalformel der Potenzialtheorie ergibt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_\Omega \Delta u(y)\Gamma(x-y)dy + \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\partial_{\mathcal{N}(y)}\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\partial_{\mathcal{N}(y)}u(y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (1)$$

Die 2. Greensche Formel für u und $g(x,\cdot)$ ergibt für jedes $x \in \Omega$

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Delta u(y) g(x,y) dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(y)\partial_{\mathcal{N}(y)} g(x,y) - g(x,y)\partial_{\mathcal{N}(y)} u(y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{2}$$

Subtraktion der Formel (2) von der Formel (1) liefert mit der Bezeichnung $G(x,y) := \Gamma(x-y) - g(x,y)$ die Identität

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \Delta u(y) G(x,y) dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left[u(y)\partial_{\mathcal{N}(y)} G(x,y) - G(x,y)\partial_{\mathcal{N}(y)} u(y)\right] d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Falls wie früher (vgl. mit VL Kap.II §2 und dem Blatt 7) eine Funktion g existiert mit $G(x,y) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$, so ermöglicht die Formel (3) eine direkte (zumindest formale) Darstellung der Lösung des Dirichlet–Randwertproblems zur Poisson-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{auf } \Omega, \\ u = \psi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

in der Form:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} f(y) G(x,y) dy + \int\limits_{\partial\Omega} \psi(y)\partial_{\mathcal{N}(y)} G(x,y) d\mathcal{H}^{n-1}(y). \tag{5}$$

Wie früher (vgl. mit VL Kap.II §2 und dem Blatt 7) heißt solche Funktion G eine *Green-Funktion zum Dirichlet Randwertproblem auf* Ω.

Aufgabe 40. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie Green-Funktionen der folgenden Dirichlet-Randwertprobleme für die Poisson-Gleichung (4). Geben Sie entsprechende Darstellungen der Lösungen mit Hilfe der Formel (5) an.

i) **(2 Punkte)** $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ sowie $f(x) = \sin|x|$ und $\psi \equiv 1$.

ii) **(3 Punkte)** $\Omega = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,:\, r > 0,\ \varphi \in (0,\pi/3)\}$ sowie $f(r,\varphi) = \varphi e^{-r^2}$ und $u(r,0) = \frac{\sin r}{1+r^8}$, $u(r,\pi/3) = \frac{\cos r}{1+r^8}$.

b) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, eine Green-Funktion für das folgende Randwertproblem mittels des Prinzips der Spiegelladung zu finden:

$$\Omega = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,:\, r > 0,\ \varphi \in (0,\pi/3)\} \text{ und } \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega, \\ u(r,0) = \psi_1(r), \\ \partial_\varphi u(r,\pi/3) = \psi_2(r). \end{cases}$$

Die Übungsblätter sind auch auf unserer Homepage erhältlich:

http://www.math.uni-sb.de/ag/fuchs/ag-fuchs.html/