Nun zum bereits mehrfach benutzten

<u>Satz 3.2</u> (<u>Banach - Steinhaus</u>, <u>Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit</u>)

Sei $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Folge stetiger linearer Operatoren definiert auf einem Banach Raum X mit Werten in einem beliebigen normierten Raum Y. Die Folge sei <u>punktweise</u> gleichmäßig beschränkt, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein $K(x) < \infty$ mit $\sup_n \|T_n x\| \leq K(x)$. Dann gilt sogar $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

Beweis: Angenommen, es gilt

$$* \qquad \sup_n \left\{ \sup_{x \in B} \|T_n x\| \right\} = \infty$$

für jede abgeschlossene Kugel $B \subset X$ mit Radius > 0. Sei B_0 die 1 Kugel um 0. Da für stetige lineare Operatoren das Supremum über eine offene Kugel mit dem Supremum über die zugehörige abgeschlossene Kugel zusammenfällt, gibt es nach $*$ einen Index n_1 und einen Punkt $x_1 \in \operatorname{Int} B_0$ mit

$$\|T_{n_1} x_1\| > 1.$$

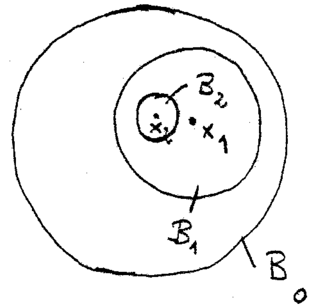
T_{n_1} ist stetig in x_1, es gibt eine abgeschlossene Kugel $B_1 \subset \operatorname{Int} B_0$ um x_1 mit $\|T_{n_1} x\| \geq 1$ für alle $x \in B_1$.

Wieder mit $*$ findet man $n_2 > n_1$ und $x_2 \in \operatorname{Int}(B_1)$, so daß

$$\| T_{n_2} x_2 \| > 2 ,$$

$B_2 \subset \operatorname{Int} B_1$ sei abgeschlossene Kugel um x_2 mit

$$\| T_{n_2} x \| \geq 2 \quad \text{auf } B_2,$$



usw.

Man bekommt so eine Folge $\{B_k\}$ abgeschlossener Kugeln $\quad B_{k+1} \subset \operatorname{Int} B_k \; , \; B_k \subset B_0$,

und eine Folge $\{n_k\}$ mit

$$\| T_{n_k} x \| \geq k \quad \forall \, x \in B_k .$$

Natürlich kann man die Kugeln so einrichten, daß

$$\operatorname{diam}(B_{k+1}) \leq \tfrac{1}{2} \operatorname{diam}(B_k)$$

in jedem Schritt gilt. Da X vollständig ist, greift der Cantor'sche Durchschnittssatz (16.6, Analysis II), es gibt einen Punkt x in $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Es folgt $\| T_{n_\ell} x \| \geq \ell$ für alle ℓ, was

aber $\quad \sup_n \| T_n x \| \leq K(x) < \infty \quad$ widerspricht.

Es gibt also eine abgeschlossene Kugel $B_r(z) \subset X$ mit

$$M := \sup_n \sup_{x \in B_r(z)} \| T_n(x) \| < \infty .$$

Ist $y \in B_1(0)$, d.h. $\|y\| \leq 1$, so gehört $x = ry + z$ zur Kugel $B_r(z)$, es folgt

$$M \geq \| T_n(x) \| \geq r \, \| T_n(y) \| - \| T_n(z) \| \Longrightarrow$$

$$\| T_n(y) \| \leq \frac{1}{r} \left(M + \| T_n(z) \| \right) \leq \frac{1}{r} \left(M + K(z) \right),$$

d.h.

$$\sup_n \| T_n \| \leq \frac{1}{r} \left(M + K(z) \right) < \infty . \qquad \square$$

<u>Korollar 1</u> : Sei X ein Banach Raum und $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Folge linearer Operatoren von X in irgendeinen normierten Raum, die punktweise konvergiert, d.h. $Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x$ existiert an jeder Stelle $x \in X$. Dann ist die Grenzfunktion T <u>stetig</u>, also T stetiger linearer Operator $X \longrightarrow Y$.

Dies zeigt die Sonderstellung stetiger linearer Operatoren: hier bleibt die Stetigkeit bereits unter punktweiser Konvergenz erhalten.

<u>Korollar 2:</u> Sei X ein normierter Raum, $\{x_n\}$ eine Folge in X mit

$$|\varphi(x_n)| \leq K(\varphi) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ \varphi \in X^*, \text{ wobei } K(\varphi) < \infty$$

ist. Dann ist $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

Speziell sind schwach konvergente Folgen in X beschränkt.

Beweis von Korollar 2: Wir betrachten die Abbildung ("Einbettung")

$$I : X \to X^{**},$$

die wie folgt definiert ist: $I(x)$ wirkt auf $\varphi \in X^*$ vermöge

$$(I(x), \varphi) := \varphi(x)$$

Es gilt

$$|(I(x), \varphi)| \leq \|\varphi\| \, \|x\|,$$

d.h.

$$\|I(x)\| = \sup_{\substack{\varphi \in X^*, \\ \|\varphi\| \leq 1}} |(I(x), \varphi)| = \|x\|.$$

Um "$\geq$" zu sehen, wählt man mit Hahn Banach (unterstellt $x \neq 0$) ein $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x) = \|x\|$.

Folglich ist $I : X \to X^{**}$ eine <u>lineare Isometrie</u>, $I(X)$ ergibt einen <u>abgeschlossenen Unterraum</u> von X^{**} (man schreibt kurz $X \subset X^{**}$)

Mit diesen Notationen können wir Korollar 2 so beweisen:

<u>Satz 3.3</u>: a) Hilbert Räume H sind reflexiv.

b) Sei (X,λ) ein Maßraum. Dann ist $L^p(X,\lambda)$ für $1<p<\infty$ reflexiver Raum.

<u>Bemerkung</u>: Aussage b) rechtfertigt unsere lange Diskussion des Dualraums von $L^p(X,\lambda)$, von der wir jetzt profitieren.

Beweis: a)

$$\begin{tikzcd} H^* \arrow[rr, "F"] & & \mathbb{R} \\ & H \arrow[ul, "R"] \arrow[ur, "\tilde{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Sei $F \in H^{**}$,

zu zeigen ist

$I(f) = F$ mit einem $f \in H$. $R: H \longrightarrow H^*$ sei der Riesz Isomorphismus $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$. Die Abbildung

$$\tilde{F} := F \circ R : H \to \mathbb{R}$$

liegt in H^*, d.h. $\tilde{F} = R(f)$ für $f \in H$. Trivialerweise gilt $I(f) = F$.

b) Für $1 < q < \infty$ haben wir die Isomorphie $(L^q)^* \cong L^{q'}$,

$q' = \frac{q}{q-1}$, speziell (wähle $q = p$ und $q = p'$)

$$\underbrace{L^{p'} \cong (L^p)^*}, \quad L^p \cong (L^{p'})^* \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{tikzcd} H^* \arrow[r, "F"] & \mathbb{R} \\ H \arrow[u, "R"] & \end{tikzcd}$$

$F \in H^{**}$

$R : x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$ $\qquad$ $I : H \longrightarrow H^{**}$

$x(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in H^*$

<u>Beh</u>: $\boxed{F = I(f)}$ für ein $f \in H$

<u>Bew</u>: $F \circ R : H \longrightarrow \mathbb{R} \implies F \circ R \in H^*$

$\implies \boxed{F \circ R = R(f)}$

D.h.: $F(\langle x, \cdot \rangle) = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in H$

$\varphi \in H^* \implies \varphi = \langle x, \cdot \rangle$ für ein $x \in H$

also: $F(\varphi) = F(\langle x, \cdot \rangle) = \langle f, x \rangle = \varphi(f)$

$= f(\varphi) = I(f)(\varphi)$

$\forall \varphi \in H^*$

$\implies F = I(f)$

$$L^p \cong \left((L^p)^* \right)^* = (L^p)^{**}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß die so konstruierte Isomorphie $L^p \to (L^p)^{**}$ gerade die kanonische Einbettung ist.

$\square$

<u>Bemerkungen:</u> a) $\dim X < \infty \implies X$ reflexiv

b) <u>Die Räume</u> $L^1(X,\lambda)$, $L^\infty(X,\lambda)$ <u>sind i.a. nicht reflexiv</u>, im Sinne der Einbettung ist i.a. $L^1 \subsetneqq (L^1)^{**}$, $L^\infty \subsetneqq (L^\infty)^{**}$

<u>Beispiel:</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Räume $L^p(\Omega)$ werden bzgl. $\mathcal{L}^n$ definiert.

Es gilt:
$$\begin{cases} C_b^0(\Omega) \subsetneqq L^\infty(\Omega), \\ C_b^0(\Omega) \text{ ist abgeschlossen in } L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Nach dem Hahn-Banach Satz (vgl. Bem c)) existiert

$$F \in L^\infty(\Omega)^*, \quad F \neq 0, \quad F\big|_{C_b^0(\Omega)} = 0.$$

Wir haben gesehen, daß eine kanonische Isomorphie

$$L^\infty(\Omega) \cong L^1(\Omega)^*$$

besteht, mithin kann man F als Element von $L^1(\Omega)^{**}$ auffassen. Angenommen, $I: L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)^{**}$ ist surjektiv. Dann gibt es eine $L^1(\Omega)$-Funktion v mit $F = I(v)$, also

$$F(\varphi) = \varphi(v) \qquad \forall \varphi \in (L^1)^*.$$

Wählt man für φ die Integration mit einer L^∞- Funktion u, so ist

$$F(u) = \int_\Omega u\, v\, dx \quad \forall u \in L^\infty(\Omega)$$

und nach Wahl von F bekommt man

$$\int_\Omega u\, v\, dx = 0 \quad \forall u \in C_b^0(\Omega).$$

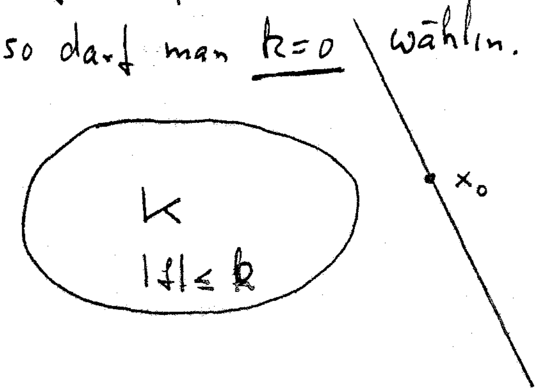
In Kapitel II ("Fundamentallemma der Variationsrechnung") werden wir zeigen, daß $v = 0$ folgt, mithin $F = 0$, Widerspruch!

c) Unsere Argumentation in b) benutzt eine andere Version des Hahn-Banach Satzes, nämlich den

<u>Trennungssatz</u>: Sei X ein normierter Raum, $K \subset X$ <u>abgeschlossen</u> und <u>konvex</u> sowie $x_0 \in X - K$. Dann gibt es $f \in X^*$ mit

$f(x_0) > k$ und $|f(x)| \le k$ auf K für ein $k \in \mathbb{R}$.
Ist K ein abgeschlossener Unterraum, so darf man <u>$k = 0$</u> wählen.

(Beweis: [Yosida, p. 108, Thm. 3])



Als Korollar zum Trennungssatz bekommt man

<u>Satz 3.4:</u> <u>Normabgeschlossene</u> und <u>konvexe</u> Mengen im normierten Raum X sind <u>schwach abgeschlossen</u>.

Beweis von Satz 3.4: Gelte $x_n \to x$ für eine Folge $\{x_n\} \subset K$ mit $K \subset X$ normabgeschlossen und konvex. Im Fall $x \notin K$ trennt man x und K mit $f \in X^*$: $f(x) > k$, $|f| \leq k$ auf K. Aus $f(x_n) \to f(x)$ folgt dann der Widerspruch $|f(x)| \leq k$.

$\square$

Zur Übung beweise man selbst die folgenden Aussagen über reflexive Räume.

<u>Satz 3.5:</u> Sei X ein Banach Raum.

a) X reflexiv, $U \subset X$ abgeschlossener Unterraum $\Longrightarrow$ U reflexiv

b) X^* reflexiv $\Longleftrightarrow$ X reflexiv

c) Endliche Produkte reflexiver Räume sind reflexiv.

Hinweis: In a) benötigt man Hahn-Banach, um Elemente von U^* zu linearen Funktionalen auf X fortzusetzen.

$\square$

Reflexive Räume sind schwach vollständig, genauer

<u>Satz 3.6</u>: Sei X reflexiver Raum und $\{x_n\}$ eine schwache Cauchy Folge, d.h. $\{\varphi(x_n)\}$ ist für jedes $\varphi \in X^*$ reelle Cauchy Folge und somit in $\mathbb{R}$ konvergent. Dann ist $\{x_n\}$ schwach konvergent.

Beweis: Sei $T_n : X^* \to \mathbb{R}$ definiert durch $T_n(\varphi) = \varphi(x_n)$. T_n konvergiert punktweise gegen $T : X^* \to \mathbb{R}$ linear, nach Banach Steinhaus gilt $T \in X^{**}$, also $T(\varphi) = \varphi(x)$ mit $x \in X$ wegen der Reflexivität von X. Offenbar ist dann $x_n \rightharpoonup x$. □

Wir kommen zum Hauptergebnis dieses Paragraphen

Satz 3.7: $\boxed{\text{Reflexive Räume sind schwach folgenkompakt, d.h. normbeschränkte Folgen haben stets schwach konvergente Teilfolgen.}}$

Korollar: $\boxed{\text{In } L^p(X,\lambda) \text{ kann man im Fall } 1<p<\infty \text{ aus jeder beschränkten Folge eine schwach konvergente Folge auswählen.}}$

Bemerkungen: 1) Das Korollar besagt konkret: gilt

$$\sup_n \int_X |u_n|^p \, d\lambda < \infty,$$

so findet man $u \in L^p(X,\lambda)$ und eine Teilfolge $\{u_n'\}$ mit

$$\int_X u_n' v \, d\lambda \longrightarrow \int_X u v \, d\lambda \quad \forall v \in L^{\frac{p}{p-1}}(X,\lambda)$$

2) Wesentlich tiefer ist die Umkehrung von Satz 3.7, die uns natürlich weniger interessiert, aber immerhin zeigt, daß Reflexivität genau das

richtige Konzept ist, um die schwache Bolzano-Weierstraß Eigenschaft zu garantieren.

<u>Satz:</u> (Eberlein)

Gilt im Banach Raum X die schwache Bolzano-Weierstraß Eigenschaft, so ist X reflexiv.

Beweis: s. [Yosida], man braucht sehr viel Topologie!

3) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und das Lebesgue Maß $\mathcal{L}^n$ sind $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ nicht reflexiv. Folglich ist hier das schwache Auswahlprinzip verletzt, und dies macht die Räume ungeeignet zur Lösung von Variationsproblemen.

<u>Beweis von Satz 3.7</u>: Es sei zunächst X^* separabel, $\{T_m\}$ bezeichne eine normdichte, abzählbare Teilmenge von X^*. $\{x_n\}$ sei beschränkte Folge in X, völlig analog zum Beweis von Satz 3.1 bekommt eine Teilfolge $\{x_n'\}$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n')$ existiert, $T \in \{T_1, T_2, \dots\}$. Die Dichtheit von $\{T_m\}$ benutzend, folgt (wie in 3.1)

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n') \text{ existiert } \forall T \in X^*.$$

Satz 3.6 ergibt die schwache Konvergenz von $\{x_n'\}$.

Sei X^* beliebig. U bezeichne den Normabschluß der linearen Hülle der Folgenglieder $x_1, x_2 \dots$. U ist offenbar separabel und reflexiv, mithin ist $\mathcal{U}^{**}$ separabel, dem anschließenden Lemma entnehmen wir Separabilität von $\mathcal{U}^*$. Der 1^{te} Beweisteil sagt: es gibt eine Teilfolge $\{x_n'\}$ und ein $x \in \mathcal{U}$ mit $x_n' \rightharpoonup x$ in $\mathcal{U}$, also $\varphi(x_n') \to \varphi(x)$ für jedes stetige Funktional $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Ist $\Psi \in X^*$, so liegt $\varphi := \Psi|_{\mathcal{U}}$ in $\mathcal{U}^*$ und wir bekommen $\Psi(x_n') = \varphi(x_n') \longrightarrow \varphi(x) = \Psi(x)$, also $x_n' \rightharpoonup x$ in X. $\square$

Nachzutragen bleibt

<u>Lemma:</u> Ist der Dualraum X^* eines normierten Raumes separabel, so ist X selbst separabel.

<u>Die Umkehrung ist falsch:</u> für offene $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $L^1(\Omega, \mathcal{L}^n)$ separabel (s. später), nicht aber $L^1(\Omega, \mathcal{L}^n)^* \cong L^\infty(\Omega, \mathcal{L}^n)$!

Beweis des Lemmas: $S^* = \{F \in X^* : \|F\| = 1\}$ ist auch separabel, sei $\{F_i\}$ dicht in S^*. Dann wählt man $x_{ik} \in X$ mit $\|x_{ik}\| = 1$ und $F_i(x_{ik}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|F_i\| = 1$. Sei $\mathcal{U}$ der Normabschluß der linearen Hülle von $\{x_{ik}\}$. $\mathcal{U}$ ist separabel und die Behauptung folgt aus $\mathcal{U} = X$: ist $\mathcal{U} \subsetneq X$, so existiert $F \in S^*$ mit $F|_{\mathcal{U}} = 0$. Man wählt $F_i \in S^*$ mit $\|F - F_i\| \le 1/2$ (Dichtheit!), es folgt

$$|F_i(x_{ik})| = |F_i(x_{ik}) - F(x_{ik})| \le \tfrac{1}{2}\|x_{ik}\| = 1/2,$$

was $F_i(x_{ik}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ widerspricht.