

Einführung in die Riemannsche Geometrie

Blockveranstaltung, Saarbrücken, März 2013

(Vorlesung/Übung/Seminar – C.P. je nach P.O.)

Michael Bildhauer

Inhalt.

- Kap. 0. Kurze historische Motivation
- Kap. 1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten (Erinnerung an reguläre Flächen, Definition differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, Tangentialraum, Differential, Immersionen und Einbettungen, Tangentialbündel, Orientierung, Vektorfelder, Lie- Klammer/Algebra, Bemerkungen zur Topologie, Beispiele)
- Kap. 2. Riemannsche Metriken (Definition Riemannsche Metrik, Riemannsche Mannigfaltigkeit, Isometrie, Beispiele, Lie-Gruppe, Links- (Rechts-) Translation, links- (rechts-, bi-) invariant: Riemannsche Metrik bzw. Vektorfeld, Produkt-Metrik, Vektorfeld längs einer Kurve, Längenmessung, Volumen orientierter Mannigfaltigkeiten, Existenz einer Riemannschen Metrik)
- Kap. 3. Der Zusammenhangsbegriff (affiner Zusammenhang, kovariante Ableitung, Christoffel Symbole, Parallelität, Verträglichkeit mit Riemannscher Struktur, Symmetrie, Levi-Civita (oder Riemannscher) Zusammenhang, Darstellung in einem Koordinatensystem)
- Kap. 4. Geodätische und konvexe Umgebungen (Geodätische, Differentialgleichungen der Geodätischen, geodätisches Feld, geodätischer

Fluss, Homogenitätslemma, Exponentialabbildung, Vektorfeld längs einer parametrisierten Fläche, kovariante partielle Ableitung, Symmetrie, Gauß-Lemma, Normal-Umgebung, geodätische Kugel/Sphäre, Minimalität Geodätischer, totale Normal-Umgebung, konvexe Umgebungen)

- Kap. 5. Krümmung (Krümmung (Krümmungstensor), fundamentale Eigenschaften, Schnittkrümmung (Riemannsche Krümmung), Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung, Ricci-Krümmung, Skalarkrümmung, Ricci-Tensor)
- Kap. 6. Krümmung und isometrische Immersionen (zweite Fundamentalform, Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen, Gauß-Kronecker-Krümmung und mittlere Krümmung in Kodimension 1, sphärische Gauß-Abbildung und Weingarten-Abbildung für Hyperflächen im \mathbb{R}^{n+1} , Theorem von Gauß, Gauß-Krümmung und Schnittkrümmung, geodätische Immersion, geometrische Interpretation der Schnittkrümmung nach Riemann)

Mögliche Seminarvorträge.

- Jacobi Felder
- Isometrische Immersionen: Die fundamentalen Gleichungen
- Vollständige Mannigfaltigkeiten
- Merkurs Orbit

Literatur.

- Manfredo P. do Carmo*, Riemannian Geometry. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1992.
- Frank Morgan, Riemannian Geometry. A Beginner's Guide. Jones and Bartlett Publishers, Boston-London, 1993.
- Michael Grüter*, Riemannsche Geometrie. Vorlesung an der Universität des Saarlandes, Sommersemester 1997.
- Manfredo P. do Carmo, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1976.

*: Arbeitsgrundlage