**Fachrichtung 6.1 – Mathematik**
**Universität des Saarlandes**
**Prof. Dr. Michael Bildhauer**

**Blockveranstaltung zur Einführung in die Riemannsche Geometrie**
**Saarbrücken, März 2013**

**Begleitende Übungen zu Kapitel 5.**
Keine Abgabe, keine Korrektur

**Aufgabe 1.** Es sei $G$ eine Lie Gruppe mit bi-invarianter Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter seien $X$, $Y$, $Z$ links-invariante Einheitsvektorfelder auf $G$.

$i$) Zeigen Sie
$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \, .$$
*Hinweis.* Benutzen Sie die Symmetrie des Zusammenhangs und $\nabla_X X = 0$.

$ii$) Schließen Sie
$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}\big[[X, Y], Z\big] \, .$$

$iii$) Zeigen Sie: Sind $X$, $Y$ orthonormal und ist $\sigma$ die von $X$ und $Y$ aufgespannte Ebene, so ist
$$K(\sigma) = \frac{1}{4}\|[X, Y]\|^2 \, .$$
*Hinweis.* Beachten Sie Gleichung (3) aus Kapitel 2.

*Folgerung.* Die Schnittkrümmung einer Lie Gruppe mit bi-invarianter Riemannscher Metrik ist nicht-negativ und verschwindet genau dann, wenn $X$ und $Y$ kommutieren, d.h. wenn $[X, Y] = 0$.

---

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie $i.$) von Satz 1, d.h.: Beweisen Sie, dass $R$ bilinear auf $\mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M)$ ist.

---

**Aufgabe 3.** Betrachten Sie die zwei-dimensionale Sphäre mit Radius $a > 0$ und den üblichen sphärischen Koordinaten $x_1 = \theta$, $x_2 = \varphi$.

Bitte wenden.

*i)* Zeigen Sie, dass die Metrik gegeben ist durch

$$g_{11} = a^2 \sin^2 \varphi \ , \quad g_{12} = 0 \ , \quad g_{22} = a^2 \ .$$

*ii)* Berechnen Sie die Christoffel Symbole

$$\Gamma^1_{12} = \cot \varphi \ , \quad \Gamma^2_{11} = - \sin \varphi \cos \varphi \ , \quad \Gamma^i_{jk} = 0 \ \text{ sonst} \ ,$$

und folgern Sie die Gleichungen für die Geodätischen.

*iii)* Berechnen Sie die Koeffizienten $R^m_{ijk}$ des Krümmungstensors:

$$R^1_{212} = -R^1_{122} = 1 \ , \quad R^2_{121} = -R^2_{211} = \sin^2 \varphi \ , \quad R^m_{ijk} = 0 \ \text{ sonst} \ .$$

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/ag-fuchs/Riemann/riemann.html