Errata

- S. 7, Z.9: $\cos t$ (nicht: cost)
- S. 9, Z. 25, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (nicht: $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$).
- S. 16, Kasten: Der (2,2)-Eintrag der letzten Matrix lautet v_2 (nicht: u_2).
- S. 23, Z. 21: $u''(s) \overset{(1)}{=} -|\alpha'(u(s))|^2 \frac{\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} \cdot \alpha''(u(s))u'(s)$
- S. 24, Z. 8: $|\alpha'(u(s))|^{-6}[|\alpha'(u(s))|^2|\alpha''(u(s))|^2 - (\alpha'(u(s)) \cdot \alpha''(u(s)))^2]$.
- S. 25, Z. 3: t'_β (nicht t').
- S. 27, Z. 3: Es handelt sich um die nach Bogenlänge parametrisierte Helix, ...
- S. 27, Z. 8: $t(s) = \frac{1}{c}\left(-R\sin\frac{s}{c}, R\cos\frac{s}{c}, h\right)$.
- S. 31, Z. 20: $[a, b]$ (nicht: $[a, b)$).
- S. 34, Z. 4: $\overset{g \text{ max. in } 0}{=} |g''(0)| = |g''(0)|\sqrt{1 + |g'(0)|^2}^3$.
- S. 36, Z. 4: [...], d.h. nach Definition der *orientierten* Krümmung $\kappa(s) = \theta'(s)$.
- S. 36, Z. 23: $\sigma(s, u) := \begin{cases} \frac{\alpha(u)-\alpha(s)}{|\alpha(u)-\alpha(s)|}, & s < u,\ u - s < L \\ \alpha'(s), & s = u \\ -\alpha'(0), & s = 0,\ u = L. \end{cases}$
- S. 37, Z. 11f:

$$\frac{\alpha(u) - \alpha(s)}{|\alpha(u) - \alpha(s)|} = \frac{\alpha(u) - \alpha(s + L)}{u - (s + L)} \frac{u - (s + L)}{|\alpha(u) - \alpha(s + L)|}$$

  mit $(\alpha(u) - \alpha(s + L)) \,/\, (u - (s + L)) \to \alpha'(L)$
- S. 37, Z. 15: [...] und $\alpha'(0) = \alpha'(L)$ Aussage 2.) ergibt.
- S. 38, Z. 14: [...], m.a.W: $I_{T_\alpha} = I_\alpha$, so dass [...]
- S. 38, letzte Zeile: als (nicht: also).
- S. 39, Z. 28: Hierbei ist $n_\alpha(s_0)$ der *Hauptnormalenvektor* zu α in s_0.

- S. 41, Z. 24ff: 2.) Man überlegt sich: Die x-Achse hat keinen weiteren Punkt zwischen $\chi_1 = \alpha(s_{\min})$ und $\chi_2 = \alpha(s_{\max})$ mit Spur α gemeinsam. Nehmen wir an, dass es doch einen dritten gemeinsamen Punkt χ gibt.

  Ist die Tangente in χ gleich der x-Achse, so verläuft wegen der Konvexität von α ein Teil der Spur von α in dieser Gerade, was $\kappa(s_{\min}) = \kappa(s_{\max}) = 0$ ergibt, Widerspruch. Also schneidet die Tangente in χ die x-Achse genau in χ. Dann liegen aber χ_1 und χ_2 auf verschiedenen Seiten der Tangente, was wiederum der Konvexität der Kurve α widerspricht. Also schneidet die Kurve α die x-Achse nur in χ_1 und χ_2.

- S. 44: Es fehlt: insgesamt

$$\begin{aligned} A = \int_0^L x(s)y'(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^L -y(s)x'(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L x(s)y'(s) - x'(s)y(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3}$$

  2. Wir wählen zwei Punkte $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Spur}(\alpha)$, die den Durchmesser von $\mathrm{Spur}(\alpha)$ realisieren, also $|\xi_1 - \xi_2| = \mathrm{diam}(\mathrm{Spur}(\alpha))$. Nach Drehung und Verschiebung können wir annehmen, dass die Situation so aussieht wie in Abbildung 1.

     Es gelte: $\xi_2 = \alpha(0), \xi_1 = \alpha(l)$ mit einem $l \in (0, L)$. Die Parametrisierung $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ hat die Form $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, für den Kreis wählen wir die Parameterdarstellung (nicht notwendig regulär oder injektiv)

$$\beta(s) = (x(s), \tilde{y}(s)),\ 0 \le s \le L,$$

     mit

$$\tilde{y}(s) = \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x^2(s)}, & 0 \le s \le l, \\ -\sqrt{r^2 - x^2(s)}, & l \le s \le L. \end{cases}$$

     Die Kreisfläche ist πr^2, es ist aber nicht klar, ob die Formeln aus (3) das für die „schlichte Parametrisierung“ β liefern. Wir rechnen dies deshalb nach:

$$\begin{aligned} \int_0^L \beta_1'(s)\beta_2(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^l x'(s)\sqrt{r^2 - x^2(s)}\,\mathrm{d}s - \int_l^L x'(s)\sqrt{r^2 - x^2(s)}\,\mathrm{d}s \\ &\overset{u=x(s)}{=} \int_r^{-r} \sqrt{r^2 - u^2}\,\mathrm{d}u - \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -2\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - u^2}\,\mathrm{d}u = -\pi r^2. \end{aligned}$$

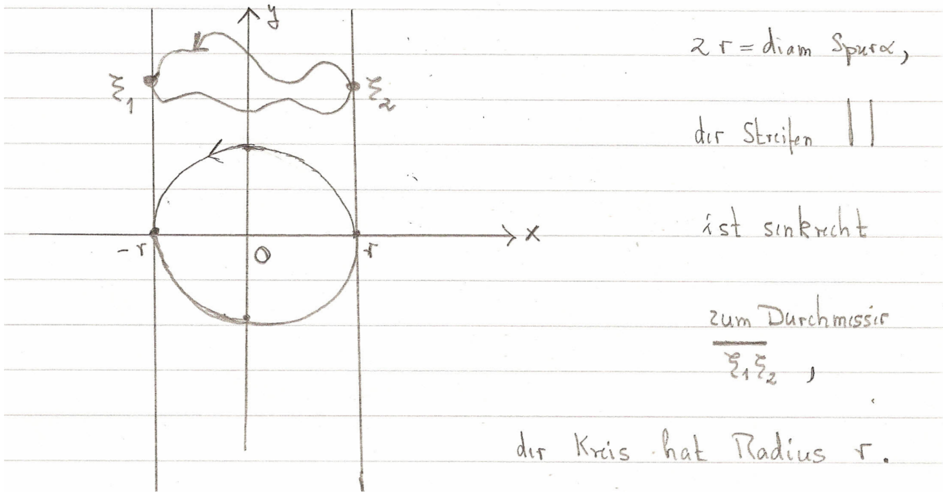

Abbildung 1: Skizze

Damit folgt nun:

$$
\begin{aligned}
A + \pi r^2 &\overset{(3)}{=} \int_0^L x(s)y'(s) - \beta_1'(s)\beta_2(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^L (x(s), \beta_2(s)) \cdot (y'(s), -\beta_1'(s))\,\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \int_0^L \underbrace{|(x(s), \beta_2(s))|}_{=r} \underbrace{|(y'(s), -\beta_1'(s))|}_{=1}\,\mathrm{d}s = rL.
\end{aligned}
$$

Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel sagt

$$\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\pi r^2,$$

sodass mit obiger Abschätzung

$$A\pi r^2 \leq \left(\frac{1}{2} rL\right)^2 \iff L^2 \geq 4\pi A$$

ist.

3. Diskussion der Gleichheit: Insgesamt tritt Gleichheit ein, wenn
   (a) Gleichheit in der AGM Ungleichung vorliegt (, also $A = \pi r^2$) und
   (b) $(x(s), \beta_2(s))$, $(y'(s), -\beta_1'(s))$ *positiv* linear abhängig sind (Gleichheitsbedingung bei Cauchy-Schwarz).

   Es gilt

$$(x(s), \beta_2(s)) = (\beta_1(s), \beta_2(s)) = -rn_\beta(s)$$

und

$$(y'(s), -\beta_1'(s)) = (y'(s), -x'(s)) = -n_\alpha(s).$$

Positive lineare Abhängigkeit bedeutet $n_\alpha = n_\beta$, mithin $t_\alpha = t_\beta$. Das ergibt

$$\alpha = \beta + \mathrm{const}\,.$$

- S. 47, Z. 22: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *offen* und $V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar.
- S. 51, Z. 1: $\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \operatorname{sign} \det D\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}) N(\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$.
- S. 51, Z. 9: $\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = DX|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(\partial_{\tilde{u}}\varphi(\tilde{u}, \tilde{v}))$
- S. 51, Z. 15:

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= |\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}|^{-1} (\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}})(\tilde{u}, \tilde{v}), \\
\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= [\partial_{\tilde{u}}\varphi^1(\tilde{u}, \tilde{v})\partial_{\tilde{v}}\varphi^2(\tilde{u}, \tilde{v}) - \partial_{\tilde{u}}\varphi^2(\tilde{u}, \tilde{v})\partial_{\tilde{v}}\varphi^1(\tilde{u}, \tilde{v})] X_u \times X_v|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} \\
&= \det D\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})(X_u \times X_v)|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})},
\end{aligned}$$

  also $\tilde{N}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \operatorname{sign}(\det D\varphi) N|_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}$.
- S. 53, Z. 5: Bilinearform (nicht: Biliarform).
- S. 53, Z. 26: Bilinearform (nicht: Binlearform).
- S. 57, Z. 11: $0 = (N \cdot N)_u = 2N_u \cdot N,\ 0 = (N \cdot N)_v = 2N_v \cdot N$.
- S. 57, Z. 24: $N_v \cdot X_u = (N \cdot X_u)_v - N \cdot X_{uv} = -N \cdot X_{uv}$.
- S. 58, Z. 6: und gewinnt mit $II^{TX}_{(u,v)}$ eine [...]
- S. 58, Z. 16: $II_{(u,v)}(e_1, e_2) = -N_u(u, v) \cdot X_v(u, v) = -X_u(u, v) \cdot N_v(u, v) = II_{(u,v)}(e_2, e_1)$,
- S. 59, Z. 12: (3) $II^{T(B\circ X)}_{(u,v)}(R(U), R(V)) = II^{TX}_{(u,v)}(U, V)$ für alle $U, V \in T_{(u,v)}X$.
- S. 59, Z. 26: Die Kettenregel liefert $D\tilde{N}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) = DN_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})(\tilde{U}))$ sowie [...]
- S. 61, Z. 10:

$$\sum_{Q(w_0)} |X_u(w_0) \times X_v(w_0)| \cdot |Q(w_0)| \longrightarrow \int_\Omega |X_u \times X_v| \, dudv$$

- S. 61, Z. 15:

$$\int_\Omega \sqrt{|X_u|^2\,|X_v|^2 - (X_u \cdot X_v)^2}\, dudv =$$

- S. 61, letzte Zeile: S. 55 (nicht: p. ?).
- S. 62, Z. 26: $= II_w^{TX}(\alpha'(0), \alpha'(0)) = S_w(\alpha'(0)) \cdot \alpha'(0)$,
- S. 63, Z. 12: $\Theta := \Theta(s) :=$ Winkel zwischen t' und $\overline{N}$ zur Zeit s
- S. 67, Z. 4: Es gibt daher $V_2 \in T_w X$ mit $V_2 \perp V_1$, [...].
- S. 67, Z. 9: [...], also $S_w(V) = \kappa_1(w)V$ auf $T_w X$.
- S. 67, Z. 23: einer Sphäre (nicht: eine Sphäre).
- S. 68, Z. 23f: $III_w(V, W) := S_w(V) \cdot S_w(W)$.
- S. 68, letzte Zeile: Eintrag (1,2) lautet $X_{u_1} \cdot X_{u_2}$.
- S. 70, zweiter Kasten: ein *mit* fehlt.
- S. 71, Z. 1: $H = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}(\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M})$.
- S. 73, Z. 19: [...], so gilt ($K = \det(G^{-1}B)$, siehe S. 76)
- S. 73, letzte Zeile: $\omega \colon \mathbb{R} \supset I \to \Omega,\ \omega = (\omega_1, \omega_2)$.
- S. 74, Z. 14: [...], so dass im Falle einer *Asymptotenlinie* γ gilt [...]
- S. 78, Z. 4: Krümmungslinien (nicht: Kümmungslinien).
- S. 79, Z. 4: $w \colon I \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$.
- S. 79, Z. 15: [...], und bei einer *regulären* Fläche [...]
- S. 83, letzte Zeile: $H = \frac{\mathcal{L}\mathcal{G}+\mathcal{N}\mathcal{E}-2\mathcal{M}\mathcal{F}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)} \overset{\mathcal{E}=\mathcal{G},\mathcal{F}=0}{=} \frac{\mathcal{E}(\mathcal{L}+\mathcal{N})}{2\mathcal{E}^2} = \frac{\mathcal{L}+\mathcal{N}}{2\mathcal{E}}$.