



Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 1

Abgabetermin: /

Materialien: Lektionen 1 – 3; Sections 1-1 – 1-4 in [Car16]

Übung 1.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ schneidet die ebene Gerade durch die Punkte $(0, 1)$ und $(t, 0)$ die Einheitskreislinie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$ in genau einem von $(0, 1)$ verschiedenen Punkt, der durch $(x(t), y(t))$ bezeichnet sei.

- (i) Bestimmen Sie die Funktionen $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass durch $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre Parametrisierung von $K \setminus \{(0, 1)\}$ gegeben ist.
- (ii) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\alpha|_{[-1, 1]}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \alpha(t)$.

Übung 2.

Begründen Sie, dass die folgenden Kurven im \mathbb{R}^3 endliche Länge haben und berechnen Sie diese:

- (i) $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (6t, 3t^2, t^3)$,
- (ii) $\gamma: [0, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, t \sin(t), t \cos(t))$.

(Hinweis: Sie können folgende Identität ohne Beweis benutzen: $\int_0^s \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2}(\sqrt{1+s^2} \cdot s + \operatorname{arsinh}(s))$ mit $s > 0$.)

Übung 3.

Parametrisieren Sie die folgenden Kurven nach der Bogenlänge:

- (i) $\delta: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto e^{-t}(\cos(t), \sin(t), 1)$,
- (ii) $\varepsilon: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

Übung 4.

Seien $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine reguläre Kurve, $[a, b] \subset I$ und $A = \alpha(a)$, $B = \alpha(b)$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie:

- (i) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(B - A) \cdot e \leq L_\alpha,$$

wobei L_α die Länge des Bogens von A nach B sei.

- (ii) Die kürzeste Länge von A nach B ist die Strecke, welche diese beiden Punkte verbindet.

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.