UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 10, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 17; Bis S. 73 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und Section 3-1 – 3-3 in [Car16]

Übung 1.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $w \in \Omega$ und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Zeigen Sie: Durch die Abbildung

$$III_w\colon T_wX \times T_wX \to \mathbb{R},\ (U, V) \mapsto S_w(U) \cdot S_w(V)$$

wird eine symmetrische Bilinearform erklärt (*dritte Fundamentalform von* X) und es besteht die Beziehung

$$III_w - (\kappa_1(w) + \kappa_2(w))II_w + \kappa_1(w)\kappa_2(w)I_w \equiv 0.$$

Darin bezeichnen $\kappa_{1,2}(w)$ die Hauptkrümmungen von X bei w.

Lösung 1.

Die Bilinearität und Symmetrie sind klar.

Seien V_1 und V_2 Hauptkrümmungsrichtungen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&III_w(V_i, V_j) - (\kappa_1(w) + \kappa_2(w))II_w(V_i, V_j) + \kappa_1(w)\kappa_2(w)I_w(V_i, V_j)\\
=&(\kappa_i(w)\kappa_j(w) - (\kappa_1(w) + \kappa_2(w))\kappa_i(w) + \kappa_1(w)\kappa_2(w))\langle V_i, V_j\rangle\\
=&0
\end{aligned}$$

für alle $i, j \in \{1, 2\}$. Da (V_1, V_2) eine Orthonormalbasis von T_wX ist, folgt die Behauptung.

Übung 2.

Zeigen Sie die *Parameterinvarianz des Flächeninhalts*: Seien $\Omega, \tilde{\Omega}$ zwei Gebiete, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Fläche, $\varphi\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus und $\tilde{X} = X \circ \varphi$. Dann gilt

$$\int_\Omega |X_u(u, v) \times X_v(u, v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \times \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v})|\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{v}.$$

Lösung 2.

Sei $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$. Es gilt

$$\tilde{G}_{(\tilde{u},\tilde{v})} = D\tilde{X}^T_{(\tilde{u},\tilde{v})}D\tilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})} = D\varphi^T_{(\tilde{u},\tilde{v})}DX^T_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})},$$

sodass

$$\det(\tilde{G}_{(\tilde{u},\tilde{v})}) = \det(DX^T_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})})\det(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})})^2.$$

(bitte wenden)

Damit erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde\Omega} |\partial_1 \tilde X \times \partial_2 \tilde X| \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det(\tilde G_{(\tilde u,\tilde v)})}\,\mathrm{d}\lambda(\tilde u,\tilde v)\\
&= \int_{\tilde\Omega} \sqrt{\det(DX^T_{\varphi(\tilde u,\tilde v)} DX_{\varphi(\tilde u,\tilde v)})} |\det(D\varphi_{(\tilde u,\tilde v)})| \,\mathrm{d}\lambda(\tilde u,\tilde v)\\
&= \int_{\Omega} \sqrt{\det(DX^T_{(u,v)} DX_{(u,v)})}\,\mathrm{d}\lambda(u,v)\\
&= \int_{\Omega} \sqrt{\det(G_{(u,v)})}\,\mathrm{d}\lambda(u,v)\\
&= \int_{\Omega} |\partial_1 X \times \partial_2 X| \,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Übung 3.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares parametrisiertes Flächenstück. Definiere

$$X^\varepsilon\colon \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto X(u,v) + \varepsilon\varphi(u,v)N(u,v),$$

wobei $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ und $N(u,v)$ der Normalenvektor von X in (u,v) sind. Zeigen Sie: Für ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$ ist X^ε für alle $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ eine reguläre parametrisierte Fläche. Man bezeichnet diese als eine *Normalvariation von X*.

(*Hinweis: Es kann hilfreich sein zunächst die Formel aus Aufgabe 4 (i) zu zeigen.*)

Lösung 3.
Wir zeigen zunächst Aufgabe 4 (i): Es gilt

$$\partial_i X^\varepsilon = \partial_i X + \varepsilon(\partial_i\varphi N + \varphi\partial_i N) = \partial_i X + \varepsilon R_i$$

mit $R_i = \partial_i\varphi N + \varphi\partial_i N \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^3)$ für $i = 1,2$. Weiterhin sehen wir, dass

$$\langle \partial_i X, R_j\rangle = -\varphi\langle X, \partial_{ij} N\rangle$$

für $i,j = 1,2$, sodass

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\varepsilon &= \mathcal{E}^\varepsilon - 2\varepsilon\varphi\mathcal{L} + \varepsilon^2\|R_1\|^2,\\
\mathcal{G}^\varepsilon &= \mathcal{G}^\varepsilon - 2\varepsilon\varphi\mathcal{N} + \varepsilon^2\|R_2\|^2,\\
\mathcal{F}^\varepsilon &= \mathcal{F}^\varepsilon - 2\varepsilon\varphi\mathcal{M} + \varepsilon^2\langle R_1, R_2\rangle.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit der Identität auf S. 71 in [Fuc08] (oder Gleichung (5) auf S. 158 in [Car16])

$$\det(G^\varepsilon) = \mathcal{E}^\varepsilon\mathcal{G}^\varepsilon - (\mathcal{F}^\varepsilon)^2 = \det(G)(1 - 4\varepsilon\varphi H) + R = \det(G)\left(1 - 4\varepsilon\varphi H + \frac{R}{\det(G)}\right),$$

wobei $R \in C_c(\Omega)$ und $R \in \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Da

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -4\varepsilon\varphi H + \frac{R}{\det(G)} = 0$$

und $R/\det(G) \in C_c(\Omega)$, folgt die Behauptung mit $\det(G) > 0$.

(*Hinweis: Zur Herleitung siehe auch S. 82f in [Fuc08] oder S. 200f in [Car16].*)

(bitte wenden)

Übung 4.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Als *Minimalfläche* bezeichnet eine parametrisierte Fläche $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit verschwindender mittlerer Krümmung $H \equiv 0$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass sich eine Minimalfläche auch dadurch charakterisieren lässt, dass für sie unter allen ihren Normalvariationen (vgl. Aufgabe 3) der Flächeninhalt extremal wird (Minimum *oder* Maximum!).

(i) Es sei X^ε eine Normalvariation von X gemäß Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für die Koeffizienten $\mathcal{E}^\varepsilon, \mathcal{F}^\varepsilon$ und $\mathcal{G}^\varepsilon$ der ersten Fundamentalform von X^ε der folgende Zusammenhang besteht:
$$\mathcal{E}^\varepsilon \mathcal{G}^\varepsilon - (\mathcal{F}^\varepsilon)^2 = (\mathcal{E}^0 \mathcal{G}^0 - (\mathcal{F}^0)^2)(1 - 4\varepsilon\varphi H) + R,$$
wobei $R = R(u, v, \varepsilon)$ mit $\lim_{\varepsilon\to 0} R(u, v, \varepsilon)/\varepsilon = 0$ ist.

(ii) Folgern Sie, dass für den Flächeninhalt $\mathcal{A}(\varepsilon) = A(X^\varepsilon)$ gilt:
$$\mathcal{A}'(0) = 0 \qquad \iff \qquad H \equiv 0,$$
d.h. $\varepsilon = 0$ ist genau dann ein stationärer Punkt des Flächenfunktionals und der Flächeninhalt hat für X ein lokales Extremum, wenn die mittlere Krümmung verschwindet.

Lösung 4.

(i) Siehe Aufgabe 3.

(ii) Sei $\varepsilon_0 > 0$ aus Aufgabe 3. Definiere
$$f\colon (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \times \Omega \to \mathbb{R},\ (\varepsilon, (u, v)) \mapsto \sqrt{\det(G^\varepsilon_{(u,v)})}$$
Wir erhalten
$$\mathcal{A}'(\varepsilon) = \partial_1 \int_\Omega f(\varepsilon, \cdot)\,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \partial_1 f(\varepsilon, \cdot)\,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega \frac{-4\varphi H \det(G) + \partial_1 R(\varepsilon, \cdot)}{2\sqrt{\det(G^\varepsilon)}}\,\mathrm{d}\lambda,$$
sodass
$$\mathcal{A}'(0) = -2 \int_\Omega \varphi H \sqrt{\det(G)}\,\mathrm{d}\lambda = -2\langle \varphi, H\sqrt{\det(G)}\rangle_{L^2(\Omega)}.$$
Da die obige Gleichung für jede Testfunktion φ gilt und die Testfunktionen dicht in $L^2(\Omega)$ sind, folgt die Behauptung mit Hilfe der Regularität von X.

(*Hinweis: Siehe Seite 82f in [Fuc08] oder S. 200f in [Car16].*)

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie.* 2008.