**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

# Übungen zur Vorlesung
## Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

**Blatt 11** **Abgabetermin:** /

**Materialien: Bis Lektion 20; Kapitel 1–2 in [Fuc08]; Chapters 1–3 in [Car16]**

**Übung 1.**

(i) Zeigen Sie, dass die Parametrisierung

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,u^2+v^2)$$

des elliptischen Paraboloids keine Asymptotenlinien besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Asymptotenlinien der Parametrisierung

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,u^2-v^2)$$

des hyperbolischen Paraboloids.

**Übung 2.**
(*Vergleiche Exercise 2 in Section 3-3 in [Car16].*)

Seien $a, b > 0$. Betrachten Sie die *Wendelfläche* (*Helikloid*)

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (av\cos(u), av\sin(u), bu).$$

(i) Zeigen Sie, dass es sich um eine Regelfläche handelt. Sind die Regelgeraden Asymptotenlinien?

(ii) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche für $a = b = 1$.

(*Hinweis: Benutzen Sie* $\widetilde{\omega_2} = \operatorname{arsinh}(\omega_2)$.)

(iii) Zeigen Sie, dass $X$ eine Minimalfläche ist.

**Übung 3.**
(*Vergleiche Exercise 6 in Section 3-3 in [Car16].*)

(i) Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$X\colon (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)).$$

Berechnen Sie die geodätische Krümmung aller Breiten- und Längenkreise ($u$ bzw. $v$-Koordinatenlinien).

(ii) Die sog. *Pseudosphäre* ist die durch

$$P^2\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \left(\frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{\sin(v)}{\cosh(u)}, u - \tanh(u)\right)$$

regulär parametrisierte Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass die Pseudosphäre konstante negative Gaußkrümmung besitzt.

**(bitte wenden)**

**Übung 4.**
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung einer Fläche. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $H \equiv K \equiv 0$ auf $\Omega$.

(ii) $X(\Omega)$ ist eine Teilmenge einer Ebene.

# Literatur


[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.