UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 11, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 20; Kapitel 1–2 in [Fuc08]; Chapters 1–3 in [Car16]

Übung 1.

(i) Zeigen Sie, dass die Parametrisierung

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,u^2+v^2)$$

des elliptischen Paraboloids keine Asymptotenlinien besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Asymptotenlinien der Parametrisierung

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,u^2-v^2)$$

des hyperbolischen Paraboloids.

Lösung 1.

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto u^2+v^2$. Nach S. 73 in [Fuc08] (oder S. 166 in [Car16]) gilt

$$K(u,v) = \frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2} > 0$$

für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, sodass nach S. 74 in [Fuc08] folgt, dass es keine Asymptotenlinien auf X gibt.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto u^2-v^2$, sodass $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,f(u,v))$. Seien weiterhin $\omega\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve, $\gamma = X \circ \omega$ und $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt nach S. 49 in [Fuc08]

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(-2u,2v,1)$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,v) &= \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}},\\ \mathcal{N}(u,v) &= -\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}},\\ \mathcal{M}(u,v) &= 0.\end{aligned}$$

Damit folgt nach (6) auf S. 74 in [Fuc08] (oder (7) auf S. 162 in [Car16])

$$\kappa_n = 0 \iff (\omega_1')^2 = (\omega_2')^2,$$

also

$$\omega_1' = \pm\omega_2'$$

und damit

$$\omega_1 = \pm\omega_2 + C \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Die Asymptotenlinien sind damit $\gamma_{C,\pm}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\pm t + C, t, (\pm t + C)^2 - t^2)$ für alle $C \in \mathbb{R}$.

(bitte wenden)

Übung 2.

(*Vergleiche Exercise 2 in Section 3-3 in [Car16].*)

Seien $a, b > 0$. Betrachten Sie die *Wendelfläche* (*Helikloid*)

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (av\cos(u), av\sin(u), bu).$$

(i) Zeigen Sie, dass es sich um eine Regelfläche handelt. Sind die Regelgeraden Asymptotenlinien?

(ii) Bestimmen Sie die Krümmungslinien der Fläche für $a = b = 1$.

(*Hinweis: Benutzen Sie* $\widetilde{\omega_2} = \operatorname{arsinh}(\omega_2)$.)

(iii) Zeigen Sie, dass X eine Minimalfläche ist.

Lösung 2.

(i) Es gilt

$$X(u,v) = (0,0,bu) + v(a\cos(u), a\sin(u), 0) = \alpha(u) + vw(u)$$

für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (0,0,bt) \quad \text{und} \quad w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ t \mapsto (a\cos(t), a\sin(t), 0),$$

sodass X eine Regelfläche ist. Für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\begin{aligned}
\partial_1 X(u,v) &= \alpha'(u) + vw'(u) = (-av\sin(u), av\cos(u), b),\\
\partial_2 X(u,v) &= w(u) = a(\cos(u), \sin(u), 0),\\
\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v) &= (-ab\sin(u), ab\cos(u), -va^2),\\
\partial_{11} X(u,v) &= vw''(u) = -va(\cos(u), \sin(u), 0),\\
\partial_{12} X(u,v) &= w'(u) = a(-\sin(u), \cos(u), 0),\\
\partial_{22} X(u,v) &= (0,0,0).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$I_{(u,v)} = \begin{pmatrix} a^2v^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad II_{(u,v)} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Fixiere $u \in \mathbb{R}$ und setze $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ v \mapsto (u,v)$, sodass $\gamma = X \circ \omega$ die Regelgerade bzgl. u ist. Es gilt

$$\left\langle II_{(u,v)} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2v^2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

für alle $v \in \mathbb{R}$, sodass die Regelgeraden Asymptotenlinien sind.

(ii) Nach S. 75 in [Fuc08] (oder S. 163 in [Car16]) müssen wir die folgende Differentialgleichung lösen:

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathcal{E}\mathcal{M} - \mathcal{F}\mathcal{L})\omega_1'^2 + (\mathcal{E}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{L})\omega_1'\omega_2' + (\mathcal{F}\mathcal{N} - \mathcal{G}\mathcal{M})\omega_2'^2\\
&= \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\omega_2^2}}((a^2\omega_2^2 + b^2)\omega_1'^2 - a^2\omega_2'^2)\\
&= \frac{a^3b}{\sqrt{b^2 + a^2\omega_2^2}}\left(\left(\omega_2^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)\omega_1'^2 - \omega_2'^2\right)
\end{aligned}$$

bzw. mit $a = b = 1$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_2^2}}((\omega_2^2 + 1)\omega_1'^2 - \omega_2'^2) \iff \omega_1'^2 = \frac{1}{\omega_2^2 + 1}\omega_2'^2,$$

(bitte wenden)

wobei $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Funktion ist. Setze $\tilde{\omega}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\omega_1(t), \operatorname{arsinh}(\omega_2(t))$, sodass

$$\tilde{\omega_1}'^2 = \omega_1'^2 = \frac{1}{\omega_2^2+1}\omega_2'^2 = \frac{1}{\cosh(\tilde{\omega_2})^2}\cosh(\tilde{\omega_2})^2\tilde{\omega_2}'^2 = \tilde{\omega_2}'^2.$$

Also

$$\tilde{\omega_1} = \pm\tilde{\omega_2} + C \quad \text{bzw.} \quad \omega_1 = \pm\operatorname{arsinh}(\omega_2) + C \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Damit sind die Krümmungslinien

$$\gamma_{\pm,C}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} a\omega_2(t)\cos(\pm\operatorname{arsinh}(\omega_2(t)) + C) \\ a\omega_2(t)\sin(\pm\operatorname{arsinh}(\omega_2(t)) + C) \\ b(\pm\operatorname{arsinh}(\omega_2(t)) + C) \end{pmatrix} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Mit z.B. $\omega_2 = \mathrm{id}$, folgt

$$\gamma_{\pm,C}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} at\cos(\pm\operatorname{arsinh}(t) + C) \\ at\sin(\pm\operatorname{arsinh}(t) + C) \\ b(\pm\operatorname{arsinh}(t) + C) \end{pmatrix} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

(iii) Nach S. 71 in [Fuc08] (oder (5) auf S. 158 in [Car16]) gilt

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}(\mathcal{L}\mathcal{G} + \mathcal{E}\mathcal{N} - 2\mathcal{F}\mathcal{M}) = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2(a^2v^2+b^2)}(0+0-0) = 0,$$

sodass X eine Minimalfläche ist.

Übung 3.

(*Vergleiche Exercise 6 in Section 3-3 in [Car16].*)

(i) Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$X\colon (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)).$$

Berechnen Sie die geodätische Krümmung aller Breiten- und Längenkreise (u bzw. v-Koordinatenlinien).

(ii) Die sog. *Pseudosphäre* ist die durch

$$P^2\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \left(\frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, \frac{\sin(v)}{\cosh(u)}, u - \tanh(u)\right)$$

regulär parametrisierte Rotationsfläche. Zeigen Sie, dass die Pseudosphäre konstante negative Gaußkrümmung besitzt.

Lösung 3.

(i) Wir beachten zunächst, dass

$$N(u,v) = -(\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))$$

für alle $(u,v) \in (0,2\pi)\times(0,\pi)$ gilt.

Sei zunächst $u \in (0,2\pi)$ fest. Sei

$$\alpha\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)).$$

Dann gilt für die Bogenlänge

$$s(v) = \int_0^v |\alpha'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^v 1\,\mathrm{d}\tau = v$$

für alle $v \in (0, \pi)$, sodass α nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} t(s) &= \alpha'(s) = (\cos(u)\cos(s), \sin(u)\cos(s), -\sin(s)), \\ t'(s) &= -\alpha(s) = -(\cos(u)\sin(s), \sin(u)\sin(s), \cos(s)), \\ \overline{s}(s) &= \overline{N}(s) \times t(s) = N(u, s) \times t(s) = (\sin(u), -\cos(u), 0) \end{aligned}$$

für alle $s \in (0, \pi)$, sodass

$$\kappa_g(s) = \langle t'(s), \overline{s}(s) \rangle = 0$$

für alle $s \in (0, \pi)$, d.h. Längenkreise sind immer Geodäten.

Sei nun $v \in (0, \pi)$ fest. Sei

$$\tilde{\alpha}\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)).$$

Dann gilt für die Bogenlänge

$$s(u) = \int_0^u |\tilde{\alpha}'(\tau)| \,\mathrm{d}\tau = \int_0^u \sin(v) \,\mathrm{d}\tau = \sin(v)u$$

für alle $u \in (0, 2\pi)$, sodass

$$\alpha\colon (0, 2\pi\sin(v)) \to \mathbb{R}^3,\ s \mapsto \left(\cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\sin(v), \sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\sin(v), \cos(v)\right)$$

die Umparametrisierung von $\tilde{\alpha}$ nach der Bogenlänge ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} t(s) &= \alpha'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right), \cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right), 0\right), \\ t'(s) &= -\left(\cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{1}{\sin(v)}, \sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\frac{1}{\sin(v)}, 0\right), \\ \overline{s}(s) &= \overline{N}(s) \times t(s) = N\left(\frac{s}{\sin(v)}, v\right) \times t(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\cos(v), \sin\left(\frac{s}{\sin(v)}\right)\cos(v), -\sin(v)\right) \end{aligned}$$

für alle $s \in (0, 2\pi\sin(v))$, sodass

$$\kappa_g(s) = \langle t'(s), \overline{s}(s) \rangle = -\frac{\cos(v)}{\sin(v)}$$

für alle $s \in (0, 2\pi\sin(v))$. (Damit ist nur der Äquator ($v = \pi/2$) eine Geodäte.)

(ii) Sei $(u, v) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$. Es gelten

$$\begin{aligned} \partial_1 P^2(u, v) &= \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)^2}(-\cos(v), -\sin(v), \sinh(u)), \\ \partial_2 P^2(u, v) &= \frac{1}{\cosh(u)}(-\sin(v), \cos(v), 0), \\ \partial_1 P^2(u, v) \times \partial_2 P^2(u, v) &= -\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)^3}(\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), 1), \\ |\partial_1 P^2(u, v) \times \partial_2 P^2(u, v)| &= \frac{|\sinh(u)|}{\cosh(u)^2}, \\ N(u, v) &= -\frac{\sinh(u)}{|\sinh(u)|}\frac{1}{\cosh(u)}(\sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v), 1), \\ \partial_{11} P^2(u, v) &= -\frac{1}{\cosh(u)^3}((1 - \sinh(u)^2)\cos(v), (1 - \sinh(u)^2)\sin(v), -2\sinh(u)), \\ \partial_{12} P^2(u, v) &= \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)^2}(\sin(v), -\cos(v), 0), \\ \partial_{22} P^2(u, v) &= -\frac{1}{\cosh(u)}(\cos(v), \sin(v), 0), \end{aligned}$$

(bitte wenden)

sodass

$$I_{(u,v)} = \tanh(u)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sinh(u)^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad II_{(u,v)} = \frac{1}{|\sinh(u)|} \tanh(u)^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir mit S. 71 in [Fuc08] (oder (4) auf S. 158 in [Car16])

$$K(u,v) = \frac{\det(II_{(u,v)})}{\det(I_{(u,v)})} = -1.$$

Übung 4.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung einer Fläche. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $H \equiv K \equiv 0$ auf Ω.

(ii) $X(\Omega)$ ist eine Teilmenge einer Ebene.

Lösung 4.
Es gelte $H \equiv K \equiv 0$ auf Ω. Dann gilt $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, sodass mit Satz 10 auf S. 67 in [Fuc08] (oder Proposition 4 auf S. 149 in [Car16]) die Behauptung folgt.

Ist $X(\Omega)$ eine Teilmenge einer Ebene, so gilt $DN = 0$, sodass $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, also $H \equiv K \equiv 0$ auf Ω.

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.