



Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 1, Lösung

Abgabetermin: /

Materialien: Lektionen 1 – 3; Sections 1-1 – 1-4 in [Car16]

Übung 1.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ schneidet die ebene Gerade durch die Punkte $(0, 1)$ und $(t, 0)$ die Einheitskreislinie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$ in genau einem von $(0, 1)$ verschiedenen Punkt, der durch $(x(t), y(t))$ bezeichnet sei.

- (i) Bestimmen Sie die Funktionen $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass durch $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre Parametrisierung von $K \setminus \{(0, 1)\}$ gegeben ist.
- (ii) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\alpha|_{[-1,1]}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \alpha(t)$.

Lösung 1.

- (i) Seien $t \in \mathbb{R}$ und

$$\gamma_t: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto (as + b, cs + d),$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\gamma_t(0) = (b, d) = (0, 1) \quad \text{und} \quad \gamma_t(1) = (a, c + d) = (t, 0),$$

also

$$\gamma_t(s) = (ts, -s + 1)$$

für alle $s \in [0, 1]$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} |\gamma_t(s)|^2 &= |ts|^2 + |-s + 1|^2 = s^2 t^2 + (1 - s)^2 = s^2 t^2 + 1 - 2s + s^2 \\ &= s(s(t^2 + 1) - 2) + 1 = 1 \end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$s = 0 \quad \text{oder} \quad s = \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Damit erhalten wir

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{2t}{t^2 + 1}$$

und

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1 - \frac{2}{t^2 + 1} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

sodass

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right).$$

Da

$$\alpha'(t) = \frac{2}{(t^2 + 1)^2} (1 - t^2, 2t) \neq 0$$

(bitte wenden)

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist α eine reguläre Parametrisierung. Es bleibt zu zeigen, dass $\text{Bild}(\alpha) = K \setminus \{(0, 1)\}$. Sei dazu $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in K \setminus \{(0, 1)\}$. Wir suchen ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass

$$(x(t), y(t)) = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

gilt. Angenommen es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Für $\tilde{x} = 0$, d.h. $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, -1)$, ist $t = 0$ die eindeutige Lösung. Für $\tilde{x} \neq 0$ besitzt obiges Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$t = \frac{1 + \tilde{y}}{\tilde{x}},$$

sodass $\text{Bild}(\alpha) = K \setminus \{(0, 1)\}$.

(ii) Für $t \in \mathbb{R}$ folgt wegen

$$\alpha'(t) = \frac{2}{(t^2 + 1)^2} (1 - t^2, 2t),$$

dass

$$\begin{aligned} |\alpha'(t)| &= \frac{2}{(t^2 + 1)^2} \sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2} \\ &= \frac{2}{(t^2 + 1)^2} \sqrt{t^4 - 2t^2 + 2 + 4t^2} \\ &= \frac{2}{(t^2 + 1)^2} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} \\ &= \frac{2}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_{-1}^1 |\alpha'(t)| \, dt = 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = 2[\arctan(t)]_{-1}^1 = \pi.$$

Übung 2.

Begründen Sie, dass die folgenden Kurven im \mathbb{R}^3 endliche Länge haben und berechnen Sie diese:

(i) $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (6t, 3t^2, t^3),$

(ii) $\gamma: [0, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t \sin(t), t \cos(t)).$

(Hinweis: Sie können folgende Identität ohne Beweis benutzen: $\int_0^s \sqrt{1+t^2} \, dt = \frac{1}{2}(\sqrt{1+s^2} \cdot s + \text{arsinh}(s))$ mit $s > 0$.)

Lösung 2.

(i) Es gilt

$$\beta'(t) = (6, 6t, 3t^2) = 3(2, 2t, t^2)$$

für alle $t \in [0, 1]$, sodass

$$|\beta'(t)| = 3\sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = 3(2 + t^2)$$

für alle $t \in [0, 1]$ folgt. Damit erhalten wir

$$\int_0^1 |\beta'(t)| \, dt = 3 \int_0^1 (2 + t^2) \, dt = 3 \left[2t + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 = 7.$$

(bitte wenden)

(ii) Es gilt

$$\gamma'(t) = (1, \sin(t) + t \cos(t), \cos(t) - t \sin(t))$$

für alle $t \in [0, \sqrt{2}]$, sodass

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)|^2 &= 1 + (\sin(t) + t \cos(t))^2 + (\cos(t) - t \sin(t))^2 \\ &= 1 + \sin^2(t) + 2 \sin(t) \cos(t)t + (t \cos(t))^2 + \cos^2(t)^2 \\ &\quad - 2t \cos(t) \sin(t) + (t \sin(t))^2 \\ &= 2 + t^2 \\ &= 2 \left(1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, \sqrt{2}]$ folgt. Damit erhalten wir mit dem Hinweis

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} |\gamma'(t)| \, dt &= \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2} \, dt \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} \, dt \\ &= \sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1). \end{aligned}$$

Übung 3.

Parametrisieren Sie die folgenden Kurven nach der Bogenlänge:

(i) $\delta: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto e^{-t}(\cos(t), \sin(t), 1)$,

(ii) $\varepsilon: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

Lösung 3.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} \delta'(t) &= -e^{-t}(\cos(t), \sin(t), 1) + e^{-t}(-\sin(t), \cos(t), 0) \\ &= e^{-t}(-\cos(t) - \sin(t), \cos(t) - \sin(t), -1) \end{aligned}$$

für alle $t \in (1, \infty)$, sodass

$$|\delta'(t)| = e^{-t} \sqrt{(\cos(t) + \sin(t))^2 + (\cos(t) - \sin(t))^2 + 1} = \sqrt{3}e^{-t}$$

für alle $t \in (1, \infty)$ folgt. Damit erhalten wir für alle $t \in (1, \infty)$

$$\int_1^t |\delta'(\tau)| \, d\tau = \sqrt{3}[-e^{-\tau}]_1^t = \sqrt{3}(-e^{-t} + e^{-1})$$

und schließlich

$$s: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_1^t |\delta'(\tau)| \, d\tau = \sqrt{3}(-e^{-t} + e^{-1}).$$

Die Umkehrfunktion von s eingeschränkt auf das Bild ergibt sich zu

$$\varphi = s^{-1}: \left(0, \frac{\sqrt{3}}{e} \right) \rightarrow (1, \infty), t \mapsto -\ln \left(-\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - e^{-1} \right) \right).$$

Damit ist

$$\bar{\delta}: \left(0, \frac{\sqrt{3}}{e} \right) \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \delta(\varphi(t))$$

die Umparametrisierung nach Bogenlänge.

(bitte wenden)

(ii) Es gilt

$$\varepsilon'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

für alle $t \in (0, \infty)$, sodass

$$|\varepsilon'(t)|^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = e^{-2t}(e^{4t} + 2e^{2t} + 1) = e^{-2t}(e^{2t} + 1)^2 = (e^t + e^{-t})^2$$

Damit erhalten wir für alle $t \in (0, \infty)$

$$\int_0^t |\varepsilon'(\tau)| \, d\tau = \int_0^t (e^\tau + e^{-\tau}) \, d\tau = [e^\tau - e^{-\tau}]_0^t = 2 \sinh(t)$$

und schließlich

$$s: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad t \mapsto \int_0^t |\varepsilon'(\tau)| \, d\tau = 2 \sinh(t).$$

Die Umkehrfunktion von s ergibt sich zu

$$\varphi = s^{-1}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad t \mapsto \operatorname{arsinh}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Damit ist

$$\bar{\varepsilon}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \varepsilon(\varphi(t))$$

die Umparametrisierung nach Bogenlänge.

Übung 4.

Seien $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine reguläre Kurve, $[a, b] \subset I$ und $A = \alpha(a)$, $B = \alpha(b)$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie:

(i) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(B - A) \cdot e \leq L_\alpha,$$

wobei L_α die Länge des Bogens von A nach B sei.

(ii) Die kürzeste Länge von A nach B ist die Strecke, welche diese beiden Punkte verbindet.

Lösung 4.

(i) Sei $e \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\alpha(b) - \alpha(a) = \left(\int_0^1 \alpha'(a + t(b-a)) \, dt \right) (b-a) = \int_a^b \alpha'(t) \, dt,$$

sodass mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} (B - A) \cdot e &= (\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot e = \left(\int_a^b \alpha'(t) \, dt \right) \cdot e \leq \left| \int_a^b \alpha'(t) \, dt \cdot e \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \alpha'(t) \, dt \right| |e| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt = L_\alpha \end{aligned}$$

folgt.

(ii) Seien

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \alpha(a) + t(\alpha(b) - \alpha(a))$$

und

$$e = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{|\alpha(b) - \alpha(a)|}.$$

Dann gilt

$$L_\gamma = |\alpha(b) - \alpha(a)| = (\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot e = (B - A) \cdot e \leq L_\alpha.$$

(bitte wenden)

Literatur

- [Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.