UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 2, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: §1 – §2; Sections 1-1 – 1-6 in [Car16]

Übung 1.
Es seien $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $\alpha \times \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar mit
$$(\alpha \times \beta)' = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'.$$

(ii) Gelten mit den Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Beziehungen
$$\alpha' = a\alpha + b\beta \quad \text{und} \quad \beta' = c\alpha - a\beta,$$
so ist $\alpha \times \beta$ konstant.

(iii) Beweisen Sie für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ die Identität
$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u.$$

Lösung 1.
Nachrechnen.

Übung 2.
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ und $a \neq 0$. Betrachten Sie die durch
$$\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ s \mapsto \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c}\right)$$
erklärte parametrisierte Kurve.

(i) Ist γ nach Bogenlänge parametrisiert?

(ii) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von γ.

(iii) Zeigen Sie, dass der Winkel, unter dem sich die Gerade in Richtung des Normalenvektors von $\gamma(s)$, die durch $\gamma(s)$ geht, die z-Achse schneidet, unabhängig von $s \in \mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie diesen.

(iv) Skizzieren Sie die Kurve γ.

(bitte wenden)

Lösung 2.

(i) Sei $s \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\gamma'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\left(\frac{s}{c}\right), a\cos\left(\frac{s}{c}\right), b\right),$$

sodass

$$|\gamma'(s)|^2 = \left(\frac{a}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right)\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right)\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$$

folgt. Damit ist γ nach Bogenlänge parametrisiert.

(ii) Sei $s \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2}\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) = -\frac{a}{c^2}\left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right),$$

sodass

$$\kappa_\gamma(s) = |\gamma''(s)| = \frac{|a|}{c^2}$$

folgt. Weiterhin gilt

$$n_\gamma(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa_\gamma(s)} = -\frac{a}{|a|}\left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) = -\operatorname{sgn}(a)\left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$$

und

$$n'_\gamma(s) = -\frac{\operatorname{sgn}(a)}{c}\left(-\sin\left(\frac{s}{c}\right), \cos\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$$

sowie (mit der Rechnung auf Seite 19 im Skript)

$$\begin{aligned}
b'_\gamma(s) &= \gamma'(s) \times n'_\gamma(s) \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}(a)}{c^2}\left(-a\sin\left(\frac{s}{c}\right), a\cos\left(\frac{s}{c}\right), b\right) \times \left(-\sin\left(\frac{s}{c}\right), \cos\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) \\
&= -\frac{\operatorname{sgn}(a)}{c^2}\left(-b\cos\left(\frac{s}{c}\right), -b\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right) \\
&= -\frac{b}{c^2} n_\gamma(s),
\end{aligned}$$

sodass

$$\tau_\gamma(s) = -\frac{b}{c^2}.$$

(iii) Sei $s \in \mathbb{R}$ und definiere

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \gamma(s) + t n_\gamma(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right)\left(1 - t\frac{1}{|a|}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right)\left(1 - t\frac{1}{|a|}\right), b\frac{s}{c}\right).$$

Die Gerade α schneidet die z-Achse bei $t = |a|$. Da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot n_\gamma(s) = 0,$$

ist der Winkel immer $\pi/2$.

(iv) Vgl. Figure 1-1 auf S. 3 in [Car16] oder Abbildung auf S. 13 in [Fuc08] (Helix/Schraubenlinie).

(bitte wenden)

Übung 3.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine beliebig (nicht notwendig nach der Bogenlänge parametrisierte) reguläre Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Zeigen Sie, dass das Frenetsche Dreibein $(t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha)$ gegeben ist durch

$$t_\alpha = \frac{\alpha'}{|\alpha'|},\ n_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \times \frac{\alpha'}{|\alpha'|},\ b_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}.$$

(*Hinweis: Parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge und benutzen Sie Aufgabe 1 sowie die Seiten 23 & 24 im Skript.*)

Lösung 3.
Seien s_α die Bogenlänge von α und $\varphi\colon J = \mathrm{Bild}(s_\alpha) \to I$ die Umkehrfunktion von s_α (eingeschränkt aufs Bild). Betrachte nun die nach Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve

$$\tilde{\alpha}\colon J \to \mathbb{R}^3,\ \tau \mapsto (\alpha \circ \varphi)(\tau) = \alpha(\varphi(\tau)).$$

Per Definition gilt

$$t_\alpha = t_{\tilde{\alpha}} \circ \varphi^{-1},\ n_\alpha = n_{\tilde{\alpha}} \circ \varphi^{-1} \text{ und } b_\alpha = b_{\tilde{\alpha}} \circ \varphi^{-1}.$$

Nach (1) und (2) auf Seite 23 im Skript gelten

$$\varphi' = (|\alpha'|^{-1}) \circ \varphi$$

und

$$\varphi'' = (-|\alpha'|^{-4}(\alpha'' \cdot \alpha')) \circ \varphi.$$

Damit folgt

$$t_{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}' = (\alpha' \circ \varphi)\varphi' = (\alpha' \circ \varphi)|(\alpha' \circ \varphi)|^{-1} = \left(\frac{\alpha'}{|\alpha'|}\right) \circ \varphi$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}'' &= (\alpha' \circ \varphi)'\varphi' + (\alpha' \circ \varphi)\varphi'' \\
&= (\alpha'' \circ \varphi)(\varphi')^2 + (\alpha' \circ \varphi)\varphi'' \\
&= \left(\frac{\alpha''}{|\alpha'|^2} - \frac{\alpha'\alpha'' \cdot \alpha'}{|\alpha'|^4}\right) \circ \varphi \\
&= \left(\frac{\alpha''|\alpha'|^2 - \alpha'\alpha'' \cdot \alpha'}{|\alpha'|^4}\right) \circ \varphi \\
&= \left(\frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{|\alpha'|^4}\right) \circ \varphi
\end{aligned}$$

mit Aufgabe 1 (iii). Mit (3) auf Seite 24 im Skript ergibt sich

$$n_{\tilde{\alpha}} = \frac{\tilde{\alpha}''}{\kappa_{\tilde{\alpha}}} = \left(\frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{|\alpha'|^4} \frac{|\alpha'|^3}{|\alpha' \times \alpha''|}\right) \circ \varphi = \left(\frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \times \frac{\alpha'}{|\alpha'|}\right) \circ \varphi.$$

Schließlich erhalten wir mit Aufgabe 1 (iii)

$$\begin{aligned}
b_{\tilde{\alpha}} = t_{\tilde{\alpha}} \times n_{\tilde{\alpha}} &= \left(\frac{\alpha'}{|\alpha'|} \times (\frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \times \frac{\alpha'}{|\alpha'|})\right) \circ \varphi \\
&= \left(-\frac{1}{|\alpha' \times \alpha''||\alpha'|^2}(\alpha' \times (\alpha'' \times \alpha')) \times \alpha'\right) \circ \varphi \\
&= \left(-\frac{1}{|\alpha' \times \alpha''||\alpha'|^2}((\alpha' \cdot \alpha')(\alpha'' \times \alpha') - ((\alpha'' \times \alpha') \cdot \alpha')\alpha')\right) \circ \varphi \\
&= \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \circ \varphi,
\end{aligned}$$

da $(\alpha'' \times \alpha') \cdot \alpha' = 0$.

(bitte wenden)

Übung 4.

(i) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer beliebigen regulären ebenen Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) gegeben ist durch

$$\kappa_\alpha\colon I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer regulären ebenen Kurve bei Umorientierung das Vorzeichen wechselt.

Lösung 4.

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre ebene Kurve.

(i) Seien s_α die Bogenlänge von α und $\varphi\colon J = \mathrm{Bild}(s_\alpha) \to I$ die Umkehrfunktion von s_α (eingeschränkt aufs Bild). Betrachte nun die nach Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve

$$\tilde{\alpha}\colon J \to \mathbb{R}^2,\ \tau \mapsto (\alpha \circ \varphi)(\tau) = \alpha(\varphi(\tau)).$$

Mit $t_{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}'$ und

$$\tilde{n}_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t_{\tilde{\alpha}} = \left(\frac{1}{|\alpha'|} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \right) \circ \varphi$$

ist $(t_{\tilde{\alpha}}, \tilde{n}_{\tilde{\alpha}})$ punktweise eine positive Orthonormalbasis. Es gilt (vgl. Lösung von Aufgabe 3)

$$\begin{aligned}
t'_{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}'' &= \left(\frac{\alpha''|\alpha'|^2 - \alpha'\alpha'' \cdot \alpha'}{|\alpha'|^4} \right) \circ \varphi \\
&= \left(\frac{1}{|\alpha'|^4} \left((x'^2 + y'^2) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} - (x''x' + y''y) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \right) \circ \varphi \\
&= \left(\frac{1}{|\alpha'|^4} \begin{pmatrix} x''y'^2 - y''y'x' \\ y''x'^2 - y'x''x' \end{pmatrix} \right) \circ \varphi \\
&= \left(\frac{x'y'' - x''y'}{|\alpha'|^3} \left(\frac{1}{|\alpha'|} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \right) \right) \circ \varphi \\
&= \left(\left(\frac{x'y'' - x''y'}{|\alpha'|^3} \right) \circ \varphi \right) \tilde{n}_{\tilde{\alpha}},
\end{aligned}$$

sodass

$$\kappa_\alpha = \kappa_{\tilde{\alpha}} \circ \varphi^{-1} = \frac{x'y'' - x''y'}{|\alpha'|^3}.$$

(ii) Seien Ψ die Umorientierung von α ($\Psi' = -1$) und $\alpha_\Psi = (x_\Psi, y_\Psi)$ die umorientierte Kurve bzgl. α. Nach Teil (i) gilt

$$\kappa_{\alpha_\Psi} = \frac{x'_\Psi y''_\Psi - x''_\Psi y'_\Psi}{|\alpha'_\Psi|^3} = \left(-\frac{x'y'' - x''y'}{|\alpha'|^3} \right) \circ \Psi = (-\kappa_\alpha) \circ \Psi.$$

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.