UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 3 **Abgabetermin:** /

Materialien: Lektionen 1 – 7; §1 – §2 in [Fuc08]; Sections 1-1 – 1-6 in [Car16]

Übung 1.

Nach dem *Satz von Picard-Lindelöf* gilt: Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein *kompaktes* Intervall und $F\colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig bzgl. der zweiten Komponente, d.h. es gibt eine Konstante $L > 0$, sodass für alle $t \in J, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

gilt, dann gibt es eine eindeutige Lösung $y\colon J \to \mathbb{R}^n$ des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{y} = F(\cdot, y).$$

Zeigen Sie: Die obige Aussage gilt auch unter der Voraussetzung, dass $F\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und *linear* in der zweiten Komponente und $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist.

(*Hinweis: Benutzen Sie eine kompakte Ausschöpfung des Intervalls I.*)

Übung 2.

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine regulär parametrisierte Kurve. Zeigen Sie:

(i) Schneiden sich alle Normalen der Kurve in einem festen Punkt, so ist ihre Spur Teil einer Kreislinie.

(ii) Schneiden sich alle Tangenten der Kurve in einem festen Punkt, so ist ihre Spur Teil einer Geraden. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung, dass α regulär ist?

Übung 3.

Für $r > 0$ betrachten Sie die Abbildung

$$\gamma\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto r\left(1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Zeigen Sie:

(i) Die Kurve γ liegt im Schnitt des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ (x - r)^2 + y^2 = r^2\}$ und der Sphäre um den Ursprung vom Radius $2r$.

(ii) Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein der Kurve γ.

(iii) Berechnen Sie Krümmung und Torsion von γ.

(*Hinweis: Trigonometrische Identitäten können sehr hilfreich sein.*)

(bitte wenden)

Übung 4.

(i) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $s_0 \in I$ und $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass durch

$$\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2,\ s \mapsto \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\theta(t))\,\mathrm{d}t + a, \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(t))\,\mathrm{d}t + b\right)$$

mit

$$\theta\colon I \to \mathbb{R},\ s \mapsto \int_{s_0}^{s} \kappa(t)\,\mathrm{d}t + \varphi$$

eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit κ als orientierter Krümmung erklärt wird und diese Kurve bis auf eine Translation des Vektors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und eine Drehung des Winkels φ eindeutig bestimmt ist.

(ii) Eine sogenannte *Klothoide* ist eine ebene Kurve, die sich dadurch auszeichnet, dass ihre Krümmung an jedem Punkt proportional zu ihrer Bogenlänge bis zu diesem Punkt ist. Bestimmen Sie die reguläre Parametrisierung $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ einer Klothoide mit $\alpha(0) = (0, 0)$ und $\alpha'(0) = (1, 0)$.

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie.* 2008.