UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 3, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Lektionen 1 – 7; §1 – §2 in [Fuc08]; Sections 1-1 – 1-6 in [Car16]

Übung 1.

Nach dem *Satz von Picard-Lindelöf* gilt: Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein *kompaktes* Intervall und $F\colon J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig bzgl. der zweiten Komponente, d.h. es gibt eine Konstante $L > 0$, sodass für alle $t \in J, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

gilt, dann gibt es eine eindeutige Lösung $y\colon J \to \mathbb{R}^n$ des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{y} = F(\cdot, y).$$

Zeigen Sie: Die obige Aussage gilt auch unter der Voraussetzung, dass $F\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und *linear* in der zweiten Komponente und $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist.

(*Hinweis: Benutzen Sie eine kompakte Ausschöpfung des Intervalls I.*)

Lösung 1.

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $F\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und linear in der zweiten Komponente. Dann gilt

$$F(t, y) = F(t, 1)y$$

für alle $(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n$. Da $F(\cdot, 1)$ stetig ist, existiert $\|F(\cdot, 1)\|_K$ für jedes kompakte Intervall $K \subset I$, sodass F Lipschitzstetig auf $K \times \mathbb{R}^n$ ist. Wähle nun eine aufsteigende Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Intervalle mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = I$. Für alle n existiert auf K_n eine eindeutige Lösung y_n des Anfangswertproblems. Die Vorschrift

$$y(x) = y_n(x)$$

für $x \in K_n$ definiert eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}^n$, die die eindeutige globale Lösung des Anfangswertproblems ist.

Übung 2.

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine regulär parametrisierte Kurve. Zeigen Sie:

(i) Schneiden sich alle Normalen der Kurve in einem festen Punkt, so ist ihre Spur Teil einer Kreislinie.

(ii) Schneiden sich alle Tangenten der Kurve in einem festen Punkt, so ist ihre Spur Teil einer Geraden. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung, dass α regulär ist?

(bitte wenden)

Lösung 2.
Sei α ohne Einschränkung nach Bogenlänge parametrisiert.

(i) Nach Voraussetzung existiert eine differenzierbare Funktion

$$\lambda\colon I \to \mathbb{R},$$

sodass $\alpha(s) + \lambda(s)n_\alpha(s)$ für alle $s \in I$ konstant ist. Mit den Frenet'schen Formeln folgt

$$0 = \alpha' + \lambda' n_\alpha + \lambda n_\alpha' = (1 - \lambda\kappa_\alpha)t_\alpha + \lambda' n_\alpha + (-1\lambda\tau_\alpha)b_\alpha.$$

Da t, n, b linear unabhängig sind, folgt

$$(1 - \lambda\kappa_\alpha) = 0, \quad \lambda' = 0 \quad \text{und} \quad \lambda\tau_\alpha = 0,$$

also ist λ konstant und somit $\kappa_\alpha = 1/\lambda$ sowie $\tau_\alpha = 0$. Daraus erhalten wir, dass α planar ist mit konstanter Krümmung, d.h. die Spur von α ist Teil einer Kreislinie.

(ii) Nach Voraussetzung existiert eine differenzierbare Funktion

$$\lambda\colon I \to \mathbb{R},$$

sodass $\alpha(s) + \lambda(s)t_\alpha(s)$ für alle $s \in I$ konstant ist. Mit den Frenet'schen Formeln folgt

$$0 = \alpha' + \lambda' t_\alpha + \lambda t_\alpha' = (1 + \lambda')t_\alpha + (\lambda\kappa_\alpha)n_\alpha.$$

Da t und n linear unabhängig sind, folgt

$$(1 + \lambda') = 0 \quad \text{und} \quad \lambda\kappa_\alpha = 0,$$

also ist $\lambda(s) = -s + a$ für alle $s \in I$ mit einer Konstanten a und somit $\kappa_\alpha(s) = 0$ für alle $s \neq a$. Da κ_α stetig ist, erhalten wir $\kappa_\alpha = 0$ und damit $\alpha'' = 0$. Also ist die Spur von α Teil einer Geraden.

Betrachte

$$\alpha\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{cases} (t, -t, 0), & \text{falls } t < 0, \\ (t, t, 0), & \text{falls } t \geq 0. \end{cases}$$

Dann schneiden sich alle Tangenten im Nullpunkt, aber die Spur der Kurve ist kein Teil einer Geraden.

Übung 3.
Für $r > 0$ betrachten Sie die Abbildung

$$\gamma\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto r\left(1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

Zeigen Sie:

(i) Die Kurve γ liegt im Schnitt des Zylinders $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ (x-r)^2 + y^2 = r^2\}$ und der Sphäre um den Ursprung vom Radius $2r$.

(ii) Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein der Kurve γ.

(iii) Berechnen Sie Krümmung und Torsion von γ.

(*Hinweis: Trigonometrische Identitäten können sehr hilfreich sein.*)

(bitte wenden)

Lösung 3.

(i) Dies folgt direkt aus den Identitäten

$$\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$$

und

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 1 - \cos(t)$$

für alle $t \in (-\pi, \pi)$.

(ii) Sei $t \in (-\pi, \pi)$. Dann gilt

$$\gamma'(t) = r\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma''(t) = -r\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix},$$

sodass

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) \times \gamma''(t) &= -r^2 \begin{pmatrix} (\cos(t)\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})) - (\cos(\frac{t}{2})\sin(t)) \\ (\cos(\frac{t}{2})\cos(t)) - (-\sin(t)\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})) \\ (-\sin(t)\sin(t)) - (\cos(t)\cos(t)) \end{pmatrix} \\
&= -r^2 \begin{pmatrix} \cos(t)\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2}) - \cos(\frac{t}{2})\sin(t) \\ \cos(\frac{t}{2})\cos(t) + \sin(t)\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})) \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= r^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})(\cos(t)+2) \\ -\cos(\frac{t}{2})^3 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit

$$|\gamma'(t)|^2 = r^2\left(1 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = r^2\frac{1}{2}(\cos(t)+3)$$

folgt

$$t_\gamma(t) = \sqrt{\frac{2}{\cos(t)+3}}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$$

und mit

$$|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2 = \frac{r^4}{8}(3\cos(t)+13)$$

folgt

$$b_\gamma(t) = \sqrt{\frac{8}{3\cos(t)+13}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})(\cos(t)+2) \\ -\cos(\frac{t}{2})^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
n_\gamma(t) &= b_\gamma(t) \times t_\gamma(t) \\
&= \frac{4}{\sqrt{(3\cos(t)+13)(\cos(t)+3)}} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right)^4 - \cos(t) \\ -\frac{1}{4}\sin(t)(\cos(t)+6) \\ \frac{1}{4}\sin(t)(-4\cos\left(\frac{t}{2}\right)^3 + \cos(t)^2 + 2\cos(t)) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(iii) Sei $t \in (-\pi, \pi)$. Dann gilt

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} |\gamma'(t) \times \gamma''(t)| = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3\cos(t) + 13}{(\cos(t) + 3)^3}}.$$

Weiterhin erhalten wir

$$\gamma'''(t) = -r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \frac{1}{4}\cos(\frac{t}{2}) \end{pmatrix},$$

sodass

$$\tau_\gamma(t) = -\frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} \cdot \gamma'''(t) = -\frac{6}{r} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{3\cos(t) + 13}.$$

Übung 4.

(i) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $s_0 \in I$ und $\kappa \colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass durch

$$\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2, \ s \mapsto \left(\int_{s_0}^{s} \cos(\theta(t)) \, \mathrm{d}t + a, \int_{s_0}^{s} \sin(\theta(t)) \, \mathrm{d}t + b \right)$$

mit

$$\theta \colon I \to \mathbb{R}, \ s \mapsto \int_{s_0}^{s} \kappa(t) \, \mathrm{d}t + \varphi$$

eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit κ als orientierter Krümmung erklärt wird und diese Kurve bis auf eine Translation des Vektors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und eine Drehung des Winkels φ eindeutig bestimmt ist.

(ii) Eine sogenannte *Klothoide* ist eine ebene Kurve, die sich dadurch auszeichnet, dass ihre Krümmung an jedem Punkt proportional zu ihrer Bogenlänge bis zu diesem Punkt ist. Bestimmen Sie die reguläre Parametrisierung $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ einer Klothoide mit $\alpha(0) = (0, 0)$ und $\alpha'(0) = (1, 0)$.

Lösung 4.

(i) Sei $s \in I$. Es gilt

$$\alpha'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))),$$

sodass

$$|\alpha'(s)|^2 = \cos(\theta(s))^2 + \sin(\theta(s))^2 = 1.$$

Weiterhin erhalten wir

$$\alpha''(s) = (-\sin(\theta(s))\theta'(s), \cos(\theta(s))\theta'(s)) = \kappa(s)(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)))$$

und mit Blatt 2, Aufgabe 4

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s)(\cos(\theta(s))\cos(\theta(s)) - (-\sin(\theta(s)))\sin(\theta(s))) = \kappa(s).$$

Die Eindeutigkeit ist klar durch Integration und Unabhängigkeit von $|\alpha'|$ und $\tilde{\kappa}$ von θ.

(ii) Wähle $s_0 = 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\kappa(s) = c \cdot s$$

für alle $s \in I$ gilt. Damit folgt

$$\theta(s) = \frac{1}{2} c s^2 + \varphi$$

für alle $s \in I$. Die Bedingung $\alpha(0) = (0, 0)$ impliziert $(a, b) = (0, 0)$. Da

$$\alpha'(0) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)),$$

folgt aus der Bedingung $\alpha'(0) = (1, 0)$, dass $\varphi = 0$. Insgesamt erhalten wir also

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ s \mapsto \left(\int_0^s \cos\left(\frac{1}{2} c t^2\right) \, \mathrm{d}t, \int_0^s \sin\left(\frac{1}{2} c t^2\right) \, \mathrm{d}t \right).$$

(bitte wenden)

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.