UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 4 **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 8; Bis S. 39 in [Fuc08]; Bis Section 1-7 B in [Car16]

Übung 1.

(i) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ eine (nicht notwendig nach Bogenlänge) regulär parametrisierte ebene Kurve. Zeigen Sie: Für den Rotationsindex I_γ von γ gilt:

$$I_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t$$

(ii) Skizzieren Sie die Spur der folgenden ebenen Kurven und berechnen Sie ihren Rotationsindex:

(a) $\alpha_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(nt), \sin(nt))\ (n \in \mathbb{N})$,

(b) $\beta_{a,b}\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))\ (a, b > 0)$,

(c) $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t) - \cos(2t), \sin(t) - \sin(2t))$.

Übung 2.

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung κ und nirgends verschwindender Torsion τ. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass $t \cdot v$ konstant ist.

(ii) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $n \cdot v \equiv 0$.

(iii) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ derart, dass $b \cdot v$ konstant ist.

(iv) Das Verhältnis von Torsion τ und Krümmung κ ist konstant.

Eine Kurve, welche einer dieser äquivalenten Bedingungen genügt, heißt *Böschungslinie*.

Übung 3.

Betrachten Sie die Abbildung

$$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0), & \text{falls } t < 0, \\ (0,0,0), & \text{falls } t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}), & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass c eine reguläre differenzierbare ($c \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$) Kurve ist.

(ii) Beweisen Sie, dass die Krümmung κ von c nur auf $\left\{0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ verschwindet. Welche geometrische Bedeutung hat die Aussage $\kappa(0) = 0$?

(bitte wenden)

(iii) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Schmiegeebenen von c bei $t \downarrow 0$ die Ebene $\{(x, y, z)\ ;\ y = 0\}$ ist, während bei $t \uparrow 0$ die Ebene $\{(x, y, z)\ ;\ z = 0\}$ approximiert wird. Was bedeutet dies für die Torsion?

Übung 4.
Es seien $L > 0$ und $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene Kurve. Für ihre Krümmung κ gelte $0 < \kappa(s) \leq c$ für alle $s \in [0, L]$ mit einer Konstanten c. Zeigen Sie: Für die Länge L der Kurve gilt

$$L \geq \frac{2\pi}{c}.$$

Was bedeutet das anschaulich?

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie.* 2008.