UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 4, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 8; Bis S. 39 in [Fuc08]; Bis Section 1-7 B in [Car16]

Übung 1.

(i) Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ eine (nicht notwendig nach Bogenlänge) regulär parametrisierte ebene Kurve. Zeigen Sie: Für den Rotationsindex I_γ von γ gilt:

$$I_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t$$

(ii) Skizzieren Sie die Spur der folgenden ebenen Kurven und berechnen Sie ihren Rotationsindex:

(a) $\alpha_n\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(nt), \sin(nt))\ (n \in \mathbb{N})$,

(b) $\beta_{a,b}\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))\ (a, b > 0)$,

(c) $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t) - \cos(2t), \sin(t) - \sin(2t))$.

Lösung 1.

(i) Sei $\varphi\colon [0,L] \to [a,b]$ die Umparametrisierung von γ nach Bogenlänge und betrachte $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Dann gilt mit Blatt 2, Aufgabe 4 (ii) und der Substitutionsregel

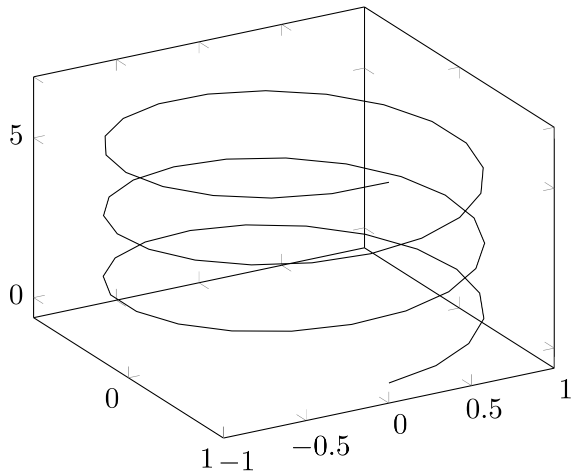
$$\begin{aligned}
I_{\tilde{\gamma}} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa_{\tilde{\gamma}}(s)\ \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^L \left(\left(\frac{x'y'' - x''y'}{|\gamma'|^3}\right) \circ \varphi\right)(s)\ \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^L \left(\left(\frac{x'y'' - x''y'}{|\gamma'|^2}\right) \circ \varphi\right)(s) \left(\frac{1}{|\gamma'|} \circ \varphi\right)(s)\ \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^L \left(\left(\frac{x'y'' - x''y'}{|\gamma'|^2}\right) \circ \varphi\right)(s)\varphi'(s)\ \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left(\frac{x'y'' - x''y'}{|\gamma'|^2}\right)(t)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

(ii) (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$I_{\alpha_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{n^3\sin(nt)^2 + n^3\cos(nt)^2}{n^2}\ \mathrm{d}t = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}t = n.$$

Plot $(n = 3)$:

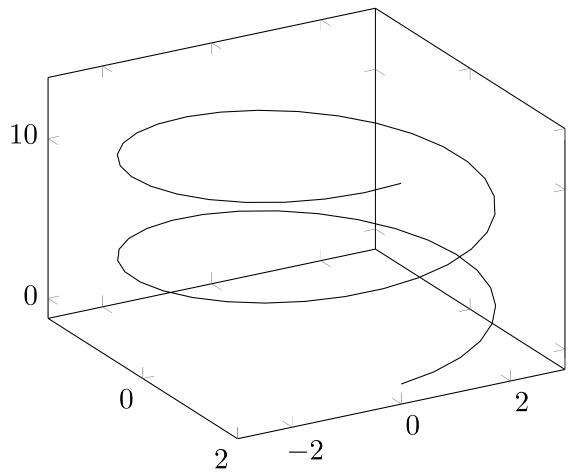
(bitte wenden)



(b) Seien $a, b > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
I_{\beta_{a,b}} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} \frac{ab(\sin(t)^2+\cos(t)^2)}{a^2\sin(t)^2+b^2\cos(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{ab}{2\pi}\int_0^{4\pi} \frac{1}{a^2\sin(t)^2+b^2\cos(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{4ab}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\sin(t)^2+b^2\cos(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\frac{a}{b}\tan(t))^2+1}\frac{\frac{a}{b}}{\cos(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{a}{b}\tan(t)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Plot ($a = 2, b = 3$):

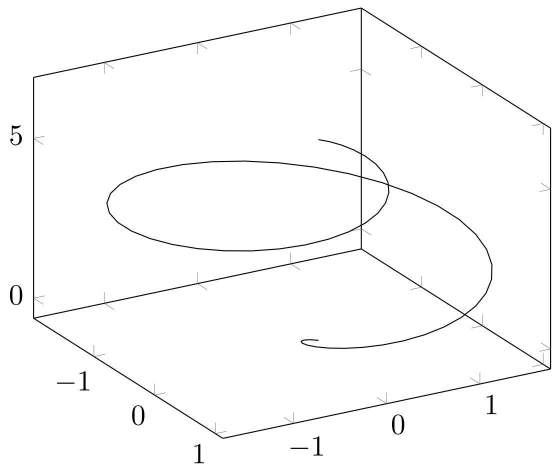


(bitte wenden)

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
I_\gamma &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(-\sin(t)+2\sin(2t))(-\sin(t)+4\sin(2t)) - (-\cos(t)+4\cos(2t))(\cos(t)-2\cos(2t))}{(-\sin(t)+2\sin(2t))^2+(\cos(t)-2\cos(2t))^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{9-6\cos(t)}{5-4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{9-6\cos(t+\pi)}{5-4\cos(t+\pi)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{9+6\cos(t)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{9+6\cos(t)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \ldots \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{2}t - \arctan\left(3\cot\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{3}{2}\pi - 0\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\pi\right)\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Plot:



Übung 2.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung κ und nirgends verschwindender Torsion τ. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass $t \cdot v$ konstant ist.

(ii) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $n \cdot v \equiv 0$.

(iii) Es gibt einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ derart, dass $b \cdot v$ konstant ist.

(iv) Das Verhältnis von Torsion τ und Krümmung κ ist konstant.

Eine Kurve, welche einer dieser äquivalenten Bedingungen genügt, heißt *Böschungslinie*.

Lösung 2.
Ohne Einschränkung sei α nach der Bogenlänge parametrisiert.

Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\frac{1}{\kappa}(t \cdot v)' = \frac{1}{\kappa}(t' \cdot v + t \cdot v') = \frac{1}{\kappa}(\alpha'' \cdot v) = n \cdot v$$

und somit

$$\frac{\tau}{\kappa}(t \cdot v)' = \tau(n \cdot v) = (b' \cdot v) = (b \cdot v)'.$$

Damit ist (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) klar.

(i) $\implies$ (iv): Sei $\lambda = t \cdot v$. Nach der zweiten Identität gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\mu = b \cdot v$ und nach der ersten Identität gilt $n \cdot v = 0$. Da (t, n, b) eine Orthonormalbasis ist, können wir

$$v = (t \cdot v)\ t + (n \cdot v)\ n + (b \cdot v)\ b = \lambda t + \mu b$$

schreiben. Damit erhalten wir mit den Frenet'schen Formeln

$$0 = \lambda t' + \mu b' = \lambda \kappa n + \mu \tau n = \kappa \left(\lambda + \mu \frac{\tau}{\kappa}\right) n,$$

sodass

$$\lambda + \mu \frac{\tau}{\kappa} = 0.$$

Wäre $\mu = 0$, so würde $v = \lambda t \neq 0$ und damit $t = 1/\lambda v$ folgen. Dies widerspricht aber $\kappa \neq 0$. Also können wir

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\lambda}{\mu} = \text{const}$$

folgern, d.h. (iv) gilt.

(iv) $\implies$ (ii): Setze $v = \frac{\tau}{\kappa} t - b \neq 0$, da t und b linear unabhängig sind. Mit den Frenet'schen Formeln gilt dann

$$v' = \frac{\tau}{\kappa} t' - b' = \frac{\tau}{\kappa} \kappa n - \tau n = 0,$$

also ist v konstant. Damit folgt

$$n \cdot v = n \cdot \left(\frac{\tau}{\kappa} t - b\right) = \frac{\tau}{\kappa} n \cdot t - n \cdot b = 0,$$

da (t, n, b) (punktweise) eine Orthonormalbasis ist.

Übung 3.
Betrachten Sie die Abbildung

$$c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0), & \text{falls } t < 0, \\ (0, 0, 0), & \text{falls } t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}), & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass c eine reguläre differenzierbare ($c \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$) Kurve ist.

(ii) Beweisen Sie, dass die Krümmung κ von c nur auf $\left\{0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$ verschwindet. Welche geometrische Bedeutung hat die Aussage $\kappa(0) = 0$?

(iii) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Schmiegeebenen von c bei $t \downarrow 0$ die Ebene $\{(x, y, z)\ ;\ y = 0\}$ ist, während bei $t \uparrow 0$ die Ebene $\{(x, y, z)\ ;\ z = 0\}$ approximiert wird. Was bedeutet dies für die Torsion?

(bitte wenden)

Lösung 3.

(i) Zunächst beachten wir, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^k} e^{-1/h^2} = 0 \tag{1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit folgt

$$c'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{c(h) - c(0)}{h} = (1, 0, 0).$$

Weiterhin erhalten wir

$$c'(t) = \left(1, \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}, 0\right)$$

für $t < 0$ und

$$c'(t) = \left(1, 0, \frac{2}{t^3} e^{-1/t^2}\right)$$

für $t > 0$. Also folgt mit Gleichung (1) $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Ebenfalls folgt mit Gleichung (1), dass

$$c''(0) = (0, 0, 0)$$

und

$$c''(t) = \left(0, \frac{4 - 6t^2}{t^6} e^{-1/t^2}, 0\right)$$

für alle $t < 0$ sowie

$$c''(t) = \left(0, 0, \frac{4 - 6t^2}{t^6} e^{-1/t^2}\right)$$

für alle $t > 0$. Insgesamt erhalten wir wieder mit Gleichung (1) $c \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

(ii) Mit (i) sieht man direkt, dass die Krümmung in 0 verschwindet und, da $4 - 6t^2 = 0$ genau dann, wenn $t \in \left\{\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$, gilt die Behauptung.

Der Graph sieht lokal um 0 wie eine Gerade aus. Parametrisiert man c nach Bogenlänge um, so ist $\kappa(0) = c''(0) = 0$, sodass kein Normalenvektor in 0 existiert und damit auch keine Schmiegeebene in 0.

(iii) Da $|c'| > 0$ gilt, genügt es $c' \times c''$ zu betrachten. Es gilt

$$c'(t) \times c''(t) = \left(0, 0, \frac{4 - 6t^2}{t^6} e^{-1/t^2}\right) = \frac{4 - 6t^2}{t^6} e^{-1/t^2} (0, 0, 1)$$

für alle $t < 0$ sowie

$$c'(t) \times c''(t) = \left(0, -\frac{4 - 6t^2}{t^6} e^{-1/t^2}, 0\right) = \frac{4 - 6t^2}{t^6} e^{-1/t^2} (0, -1, 0)$$

für alle $t > 0$.

Sei $-\sqrt{\frac{2}{3}} \neq t < 0$. Dann ist die Schmiegeebene S_t gegeben durch

$$S_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ e^{-1/t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = 0 \right\},$$

sodass

$$S_{\uparrow 0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = 0 \right\}.$$

(bitte wenden)

Sei nun $\sqrt{\frac{2}{3}} \neq t > 0$. Dann ist die Schmiegeebene S_t gegeben durch

$$S_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ e^{-1/t^2} \end{pmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 0 \right\},$$

sodass

$$S_{\downarrow 0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = 0 \right\}.$$

Man kann die Torsion der Kurve in 0 nicht stetig fortsetzen. Da die Teilkurven $c|_{-\infty,0)}$ und $c|_{(0,\infty)}$ eben sind, gilt dort $\tau = 0$. Wenn aber $\tau = 0$ überall gelten würde, dann wäre c eine ebene Kurve (Widerspruch).

Übung 4.
Es seien $L > 0$ und $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene Kurve. Für ihre Krümmung κ gelte $0 < \kappa(s) \leq c$ für alle $s \in [0, L]$ mit einer Konstanten c. Zeigen Sie: Für die Länge L der Kurve gilt

$$L \geq \frac{2\pi}{c}.$$

Was bedeutet das anschaulich?

Lösung 4.
Da $\kappa > 0$, gilt nach dem Umlaufsatz

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(s) \ \mathrm{d}s \leq \frac{c}{2\pi} \int_0^L 1 \ \mathrm{d}s = \frac{Lc}{2\pi}.$$

Die kürzeste mögliche Kurve ist eine Kreislinie mit Radius $1/c$.

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie.* 2008.