UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 5 **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 10; Bis S. 44 in [Fuc08]; Sections 1-1 – 1-7 B und Section 5-7 bis Proposition 1 in [Car16]

Übung 1.

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve und für $r > 0$

$$\alpha_r\colon I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \alpha(t) \pm r n_\alpha(t),$$

wobei $n_\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ die Normale von α bezeichnet. α_r heißt *innere* $(+)$ bzw. *äußere* $(-)$ *Parallelkurve* zu α im Abstand r.

(i) Wann ist α_r regulär? Wann ist α_r nach der Bogenlänge parametrisiert?

(ii) Drücken Sie im Fall, dass α_r regulär ist, die orientierte Krümmung κ_{α_r} von α_r durch die orientierte Krümmung κ_α von α aus.

(iii) Seien $I = \mathbb{R}$ und α periodisch mit Periode $l \in (0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} L(\alpha_r|_{[0,l]})|_{r=0} = \mp 2\pi I(\alpha|_{[0,l]}),$$

wobei $I(\alpha|_{[0,l]})$ den Rotationsindex von $\alpha|_{[0,l]}$ und L die Bogenlänge bezeichnet.

Übung 2.

Seien $L \in \mathbb{R}$ und $I = [0, L] \subset \mathbb{R}$. Eine einfach geschlossene, reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte und konvexe Kurve $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ mit nirgends verschwindender Krümmung heißt *Eilinie*.

(i) Beweisen Sie, dass eine Eilinie α zu jedem Einheitsvektor e genau einen Parameter $s \in I$ mit $t_\alpha(s) = e$ besitzt.

(ii) Begründen Sie, dass α nach dem orientierten Winkel $\vartheta\colon I \to [0, 2\pi]$ zwischen dem Tangentvektor t_α und der x-Achse umparametrisiert werden kann. Diese Koordinaten heißen *tangentiale Polarkoordinaten*.

(iii) Es bezeichne β die gemäß (ii) in tangentialen Polarkoordinaten parametrisierte Eilinie α. Die Kurve β heißt ein *Gleichdick*, falls für die *Stützfunktion* $h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\vartheta \mapsto -\beta(\vartheta) \cdot n_\beta(\vartheta)$ mit einer Konstanten $d > 0$ gilt:

$$h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi) = d$$

für alle $\vartheta \in [0, \pi]$. Zeigen Sie, dass ein Gleichdick der Breite d den Umfang πd hat.

(*Hinweis: Stellen Sie β bzgl. des Zweibeins (n_β, n'_β) und mittels der Stützfunktion h dar.*)

(bitte wenden)

Übung 3.
Seien $L > 0$ und $\alpha\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene und konvexe Kurve mit positiver Orientierung und α_r die äußere Parallelkurve im Abstand $r > 0$ (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie:

(i) $U(\alpha_r) = U(\alpha) + 2\pi r$,

(ii) $A(\alpha_r) = A(\alpha) + Lr + \pi r^2$.

Dabei bezeichnen $U(\alpha)$ den Umfang und $A(\alpha)$ den Inhalt des von der Kurve α umschlossenen Gebietes.

(*Hinweis: Sie dürfen den folgenden Satz ohne Beweis benutzen: Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ ein stetig differenzierbarer Weg mit positiver Krümmung und ohne Doppelpunkte (d.h. α ist injektiv). Seien $A = \alpha(a)$ und $B = \alpha(b)$. Dann begrenzen die Spur von α und die Strecken $\overline{OA}$ sowie $\overline{BO}$ ein beschränktes Gebiet $S \subset \mathbb{R}^2$, dessen Inhalt durch die Formel*

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_a^b x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

gegeben ist.)

Übung 4.
Seien $a > 0$ und

$$r\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ t \mapsto a\frac{\cos(2t)}{\cos(t)}.$$

Betrachten Sie die in Polarkoordinaten gegebene ebene Kurve

$$\alpha\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t)),$$

die man *Strophoide* nennt.

(i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen und zeigen Sie, dass sie die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x = -a\}$ als Asymptote hat.

(ii) Die Kurve α hat im Ursprung einen *Doppelpunkt* (d.h. es gibt $t_1 \neq t_2$ mit $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$), sodass die Kurve eine Schleife bildet. Zeigen Sie, dass der Inhalt des von dieser Schleife umschlossenen Gebietes $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$ beträgt (Skizze!).

(iii) Die Kurve schließt zusammen mit ihrer Asymptote eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Zeigen Sie, dass deren Inhalt $\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2$ beträgt.

(*Hinweis: Betrachten Sie die um den Vektor $(a, 0)$ verschobene Kurve und benutzen Sie die Formel aus Aufgabe 3.*)

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.