UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 5, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 10; Bis S. 44 in [Fuc08]; Sections 1-1 – 1-7 B und Section 5-7 bis Proposition 1 in [Car16]

Übung 1.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve und für $r > 0$

$$\alpha_r\colon I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \alpha(t) \pm r n_\alpha(t),$$

wobei $n_\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ die Normale von α bezeichnet. α_r heißt *innere* $(+)$ bzw. *äußere* $(-)$ *Parallelkurve* zu α im Abstand r.

(i) Wann ist α_r regulär? Wann ist α_r nach der Bogenlänge parametrisiert?

(ii) Drücken Sie im Fall, dass α_r regulär ist, die orientierte Krümmung κ_{α_r} von α_r durch die orientierte Krümmung κ_α von α aus.

(iii) Seien $I = \mathbb{R}$ und α periodisch mit Periode $l \in (0, \infty)$. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} L(\alpha_r|_{[0,l]})|_{r=0} = \mp 2\pi I(\alpha|_{[0,l]}),$$

wobei $I(\alpha|_{[0,l]})$ den Rotationsindex von $\alpha|_{[0,l]}$ und L die Bogenlänge bezeichnet.

Lösung 1.

(i) Es gilt

$$\alpha_r' = \alpha' \pm r n_\alpha' = \alpha' \mp r\kappa_\alpha t_\alpha = \alpha' \mp r\kappa_\alpha \alpha' = (1 \mp r\kappa_\alpha)\alpha',$$

sodass

$$|\alpha_r'|^2 = |1 \mp r\kappa_\alpha|^2 |\alpha'|^2 = |1 \mp r\kappa_\alpha|^2.$$

Dann ist α_r genau dann regulär, wenn $1 \mp r\kappa_\alpha \neq 0$ auf I. Weiterhin ist α_r genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn

$$\kappa_\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \kappa_\alpha = \pm\frac{2}{r}.$$

(ii) Sei $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ und sei $\alpha_r\colon I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x_r(t), y_r(t))$ regulär. Dann folgt mit

$$\alpha_r'' = (\mp r\kappa_\alpha')\alpha' + (1 \mp r\kappa_\alpha)\alpha'',$$

dass nach Blatt 2, Aufgabe 4 (i)

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha_r} &= \frac{x_r' y_r'' - x_r'' y_r'}{|\alpha_r'|^3} \\
&= \frac{(1 \mp r\kappa_\alpha)x'((\mp r\kappa_\alpha')y' + (1 \mp r\kappa_\alpha)y'') - ((\mp r\kappa_\alpha')x' + (1 \mp r\kappa_\alpha)x'')(1 \mp r\kappa_\alpha)y'}{|1 \mp r\kappa_\alpha|^3} \\
&= \frac{(1 \mp r\kappa_\alpha)^2 x'y'' + (1 \mp r\kappa_\alpha)(\mp r\kappa_\alpha')x'y' - (1 \mp r\kappa_\alpha)^2 x''y' - (\mp r\kappa_\alpha')(1 \mp r\kappa_\alpha)x'y'}{|1 \mp r\kappa_\alpha|^3} \\
&= \frac{\kappa_\alpha}{|1 \mp r\kappa_\alpha|}
\end{aligned}$$

(bitte wenden)

gilt.

(iii) Da α periodisch ist, ist κ_α beschränkt. Also gilt für r klein genug $1 \mp r\kappa_\alpha > 0$. Es gilt

$$L(\alpha_r|_{[0,l]}) = \int_0^l |\alpha_r'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^l |1 \mp r\kappa_\alpha(t)| \,\mathrm{d}t$$

und mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}|_{r=0} |1 \mp r\kappa_\alpha| = \left(\frac{(1 \mp r\kappa_\alpha)(\mp\kappa_\alpha)}{|1 \mp r\kappa_\alpha|} \right)|_{r=0} = \mp\kappa_\alpha$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}|_{r=0} L(\alpha_r|_{[0,l]}) = \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}|_{r=0} |1 \mp r\kappa_\alpha(t)| \,\mathrm{d}t = \mp \int_0^l \kappa_\alpha(t) \,\mathrm{d}t = \mp 2\pi I(\alpha|_{[0,l]}).$$

Übung 2.

Seien $L \in \mathbb{R}$ und $I = [0, L] \subset \mathbb{R}$. Eine einfach geschlossene, reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte und konvexe Kurve $\alpha \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ mit nirgends verschwindender Krümmung heißt *Eilinie*.

(i) Beweisen Sie, dass eine Eilinie α zu jedem Einheitsvektor e genau einen Parameter $s \in I$ mit $t_\alpha(s) = e$ besitzt.

(ii) Begründen Sie, dass α nach dem orientierten Winkel $\vartheta\colon I \to [0, 2\pi]$ zwischen dem Tangenvektor t_α und der x-Achse umparametrisiert werden kann. Diese Koordinaten heißen *tangentiale Polarkoordinaten*.

(iii) Es bezeichne β die gemäß (ii) in tangentialen Polarkoordinaten parametrisierte Eilinie α. Die Kurve β heißt ein *Gleichdick*, falls für die *Stützfunktion* $h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\vartheta \mapsto -\beta(\vartheta) \cdot n_\beta(\vartheta)$ mit einer Konstanten $d > 0$ gilt:

$$h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi) = d$$

für alle $\vartheta \in [0, \pi]$. Zeigen Sie, dass ein Gleichdick der Breite d den Umfang πd hat.

(*Hinweis: Stellen Sie β bzgl. des Zweibeins (n_β, n_β') und mittels der Stützfunktion h dar.*)

Lösung 2.

(i) Ohne Einschränkung sei $\kappa > 0$. Dann gilt $\kappa = \vartheta' > 0$, sodass ϑ streng monoton steigend ist. Ohne Einschränkung können wir $\vartheta(0) = 0$ annehmen und, da nach dem Umlaufsatz $I_\alpha = 1$ gilt, erhalten wir $\vartheta(L) = 2\pi$. Da $\vartheta([0, L]) = [0, 2\pi]$, ist $\vartheta\colon [0, L] \to [0, 2\pi]$ bijektiv. Da jeder Einheitsvektor eindeutig durch seinen Winkel mit der x-Achse festgelegt ist, folgt die Behauptung.

(ii) Da ϑ bijektiv ist und $\vartheta' = \kappa \neq 0$ auf I, folgt, dass ϑ^{-1} diffbar ist, sodass ϑ ein Diffeomorphismus ist. Also ist eine Umparametrisierung möglich.

(iii) Seien $\beta\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Umparametrisierung von α mittels ϑ und $h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\vartheta \mapsto -\beta(\vartheta) \cdot n_\beta(\vartheta)$. Da

$$t_\beta = (\cos, \sin)$$

nach Konstruktion, folgt

$$n_\beta = (-\sin, \cos), \quad n_\beta' = (-\cos, -\sin) = -t_\beta \quad \text{und} \quad n_\beta'' = (\sin, -\cos) = -n_\beta.$$

Also ist (n_β, n_β') (punktweise) eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$. Weiterhin gilt

$$h' = -\beta' \cdot n_\beta - \beta \cdot n_\beta' = -t_\beta \cdot n_\beta - \beta \cdot n_\beta' = -\beta \cdot n_\beta',$$

(bitte wenden)

sodass

$$\beta = (\beta \cdot n_\beta)n_\beta + (\beta \cdot n'_\beta)n'_\beta = -hn_\beta - h'n'_\beta$$

und damit

$$\beta' = -h'n_\beta - hn'_\beta - h''n'_\beta - h'n''_\beta = -h'n_\beta - (h+h'')n'_\beta + h'n_\beta = -(h+h'')n'_\beta = (h+h'')t_\beta.$$

Da

$$h' = -\beta \cdot n'_\beta \quad \text{und} \quad h'' = -\beta' \cdot n'_\beta - \beta \cdot n''_\beta = \beta \cdot n_\beta - \beta' \cdot n'_\beta,$$

erhalten wir

$$h'' + h = \beta \cdot n_\beta - \beta' \cdot n'_\beta - \beta \cdot n_\beta = -\beta' \cdot n'_\beta = -|\beta'|(t_\beta \cdot n'_\beta) = |\beta'|.$$

Schließlich folgt aus $h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi) = d$ für alle $\vartheta \in [0, \pi]$, dass

$$h'(\vartheta) + h'(\vartheta + \pi) = 0$$

für alle $\vartheta \in [0, \pi]$ und damit

$$h'(0) + h'(\pi) = 0 \quad \text{sowie} \quad h'(\pi) + h'(2\pi) = 0.$$

Also

$$h'(2\pi) - h'(0) = 0.$$

Der Umfang ergibt sich nun zu

$$\begin{aligned}
U(\beta) &= \int_0^{2\pi} |\beta'| = \int_0^{2\pi} h + \int_0^{2\pi} h'' \\
&= \left(\int_0^{\pi} h + \int_\pi^{2\pi} h\right) + (h'(2\pi) - h'(0)) \\
&= \int_0^{\pi} h + \int_0^{\pi} h(\vartheta + \pi)\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi} h(\vartheta) + h(\vartheta + \pi)\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{\pi} d \\
&= \pi d.
\end{aligned}$$

Übung 3.
Seien $L > 0$ und $\alpha\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene und konvexe Kurve mit positiver Orientierung und α_r die äußere Parallelkurve im Abstand $r > 0$ (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie:

(i) $U(\alpha_r) = U(\alpha) + 2\pi r$,

(ii) $A(\alpha_r) = A(\alpha) + Lr + \pi r^2$.

Dabei bezeichnen $U(\alpha)$ den Umfang und $A(\alpha)$ den Inhalt des von der Kurve α umschlossenen Gebietes.

(*Hinweis: Sie dürfen den folgenden Satz ohne Beweis benutzen: Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ ein stetig differenzierbarer Weg mit positiver Krümmung und ohne Doppelpunkte (d.h. α ist injetktiv). Seien $A = \alpha(a)$ und $B = \alpha(b)$. Dann begrenzen die Spur von α und die Strecken $\overline{OA}$ sowie $\overline{BO}$ ein beschränktes Gebiet $S \subset \mathbb{R}^2$, dessen Inhalt durch die Formel*

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

gegeben ist.)

(bitte wenden)

Lösung 3.

(i) Es gilt

$$U(\alpha_r) = \int_0^L |\alpha_r'| = \int_0^L |1 + r\kappa_\alpha| = \int_0^L (1 + r\kappa_\alpha) = L + r\int_0^L \kappa_\alpha = L + 2\pi r.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
2A(\alpha_r) &= \int_0^L x_r y_r' - x_r' y_r \\
&= \int_0^L (x - r(-y'))(1 + r\kappa_\alpha)y' - (1 + r\kappa_\alpha)x'(y - rx') \\
&= \int_0^L xy'(1 + r\kappa_\alpha) + ry'^2(1 + r\kappa_\alpha) - (1 + r\kappa_\alpha)x'y + r(1 + r\kappa_\alpha)x'^2 \\
&= \int_0^L (1 + r\kappa_\alpha)(xy' - x'y) + r(1 + r\kappa_\alpha)(x'^2 + y'^2) \\
&= \int_0^L (xy' - x'y) + r\int_0^L \kappa_\alpha(xy' - x'y) + r\int_0^L 1 + r^2\int_0^L \kappa_\alpha \\
&= 2A(\alpha) + rL + 2\pi r^2 + r\int_0^L \kappa_\alpha(xy' - x'y).
\end{aligned}$$

Da

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

und somit

$$x'x'' + y'y'' = 0$$

gilt, erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(xy' - x'y) &= (x'y'' - x''y')(xy' - x'y) \\
&= x'xy'y'' - x'^2yy'' - xx''y'^2 + x'x''yy' \\
&= -xx'^2x'' - x'^2yy'' - xx''y'^2 - yy'^2y'' \\
&= -(xx''(x'^2 + y'^2) + yy''(x'^2 + y'^2)) \\
&= -(xx'' + yy'')
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
-\int_0^L (xx'' + yy'') &= -\left([xx']_0^L - \int_0^L x'^2 + [yy']_0^L - \int_0^L y'^2\right) \\
&= \int_0^L x'^2 + y'^2 - [\alpha \cdot \alpha']_0^L \\
&= L,
\end{aligned}$$

da α geschlossen ist, das Resultat.

Übung 4.

Seien $a > 0$ und

$$r\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ t \mapsto a\frac{\cos(2t)}{\cos(t)}.$$

Betrachten Sie die in Polarkoordinaten gegebene ebene Kurve

$$\alpha\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t)),$$

die man *Strophoide* nennt.

(bitte wenden)

(i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen und zeigen Sie, dass sie die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = -a\}$ als Asymptote hat.

(ii) Die Kurve α hat im Ursprung einen *Doppelpunkt* (d.h. es gibt $t_1 \neq t_2$ mit $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$), sodass die Kurve eine Schleife bildet. Zeigen Sie, dass der Inhalt des von dieser Schleife umschlossenen Gebietes $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2$ beträgt (Skizze!).

(iii) Die Kurve schließt zusammen mit ihrer Asymptote eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Zeigen Sie, dass deren Inhalt $\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2$ beträgt.

(*Hinweis: Betrachten Sie die um den Vektor* $(a, 0)$ *verschobene Kurve und benutzen Sie die Formel aus Aufgabe 3.*)

Lösung 4.
Es gilt
$$\alpha(t) = a(\cos(2t), \cos(2t)\tan(t))$$
für alle $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(i) Es gilt
$$\cos(2t) = 0 \iff t = \pm\frac{\pi}{4}$$
und
$$\cos(2t)\tan(t) = 0 \iff t = \pm\frac{\pi}{4} \text{ oder } t = 0.$$
Also schneidet α die x-Achse in $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ und die y-Achse in $-\frac{\pi}{4}$, 0 und $\frac{\pi}{4}$. Weiterhin gilt
$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} \cos(2t) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\tan(t) = \infty$$
sowie
$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \cos(2t) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \cos(2t)\tan(t) = -\infty,$$
sodass die Gerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = -a\}$ die Asymptote von α ist.

(ii) Wir betrachten zunächst die untere Hälfte. Seien $\frac{\pi}{4} > \varepsilon > 0$ und $\alpha_\varepsilon \colon \left[-\frac{\pi}{4} + \varepsilon, 0\right] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \alpha(t)$. Dann gilt (vgl. Hinweis in Aufgabe 3)
$$\begin{aligned}
A(S_\varepsilon) &= \frac{1}{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{0} \cos(2t)\left(-2\sin(2t)\tan(t) + \cos(2t)\frac{1}{\cos(t)^2}\right) \\
&\qquad - (-2\sin(2t))\cos(2t)\tan(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{0} \left(\frac{\cos(2t)}{\cos(t)}\right)^2 \mathrm{d}t \\
&= \ldots \\
&= \frac{1}{2}a^2[-2t + \sin(2t) + \tan(t)]_{-\frac{\pi}{4}+\varepsilon}^{0} \\
&= \frac{1}{2}a^2\left(0 - \left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon + \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\varepsilon\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)\right)\right) \\
&\to \frac{1}{2}a^2\left(-\frac{\pi}{2} + 2\right).
\end{aligned}$$
für $\varepsilon \to 0$. Damit folgt die Aussage.

(bitte wenden)

(iii) Wir betrachten zunächst die obere Hälfte. Seien $\frac{\pi}{4} > \varepsilon > 0$ und $\alpha_\varepsilon \colon \left[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, -\frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \alpha(t) + (a, 0)$. Dann gilt (vgl. Hinweis in Aufgabe 3)

$$\begin{aligned}
A(S_\varepsilon) &= \frac{1}{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{-\frac{\pi}{4}} (\cos(2t) + 1) \left(-2\sin(2t)\tan(t) + \cos(2t)\frac{1}{\cos(t)^2}\right) \\
&\qquad - (-2\sin(2t))\cos(2t)\tan(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{-\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos(2t)}{\cos(t)}\right)^2 - 2\sin(2t)\tan(t) + \frac{\cos(2t)}{\cos(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{2}a^2[-2t + 2\sin(2t)]_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{-\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2}a^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) - (\pi - 2\varepsilon + 2\sin(-\pi + 2\varepsilon))\right) \\
&= \frac{1}{2}a^2 \left(-\frac{\pi}{2} - 2 - 2\varepsilon - 2\sin(-\pi + 2\varepsilon)\right) \\
&\to -\frac{1}{2}a^2 \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$. Damit folgt die Aussage.

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.