UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 6 **Abgabetermin:** /

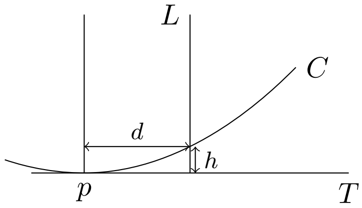
Materialien: Bis Lektion 10; Bis S. 44 in [Fuc08]; Sections 1-1 – 1-7 B und Section 5-7 bis Proposition 1 in [Car16]

Übung 1.

(i) Es sei C eine ebene Kurve, T die Tangente an C in $p \in C$ und L eine Gerade parallel zur Normalen in p in einem Abstand d von p (siehe unten). Es bezeichne h die Länge des Segments auf L, das durch C und T bestimmt ist (h ist also die „Höhe“ von C relativ zu T). Beweisen Sie, dass

$$|\kappa(p)| = \lim_{d \to 0} \frac{2h}{d}$$

gilt.



(ii) Ist eine geschlossene ebene Kurve C in einer Kreisscheibe vom Radius r enthalten, so zeigen Sie, dass es einen Punkt $p \in C$ derart gibt, dass die Krümmung κ von C in p

$$|\kappa| \geq \frac{1}{r}$$

erfüllt.

Übung 2.

Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, ebene Kurve, welche nach der Bogenlänge parametrisiert ist und es bezeichne $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die (orientierte) Krümmung dieser Kurve. Zeigen Sie, dass α konvex ist, wenn $\kappa(s) \geq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(s) \leq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt.

Übung 3.

(i) Gibt es eine einfach geschlossene ebene Kurve mit einer Länge von sechs Metern, welche eine Fläche von drei Quadratmetern umschließt? Begründen Sie ihre Antwort!

(ii) Es seien $\overline{AB}$ eine Strecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und $l > |\overline{AB}|$. Beweisen Sie, dass eine Kurve der Länge l, welche die Punkte A und B verbindet und zusammen mit der Strecke $\overline{AB}$ den größtmöglichen Flächeninhalt einschließt, ein Kreisbogen von A nach B ist.

(bitte wenden)

Übung 4.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Es seien $\kappa \neq 0$, $\kappa' \neq 0$ und $\tau \neq 0$ auf ganz I. Die Funktionen κ und τ müssen auf I der Gleichung

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right) = r^2$$

genügen, wobei $r > 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie: α liegt auf einer Sphäre mit Radius r.

(*Hinweis: Betrachten Sie die Kurve*

$$\beta\colon I \to \mathbb{R}^3,\ s \mapsto \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2\tau(s)}b(s)$$

wobei (t, n, b) *das Frenetsche Dreibein von* α *bezeichnet.*)

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.