UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 6, Lösung **Abgabetermin:** /

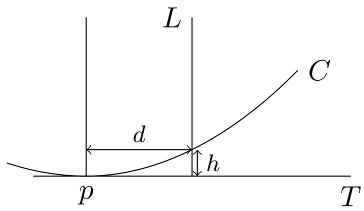
Materialien: Bis Lektion 10; Bis S. 44 in [Fuc08]; Sections 1-1 – 1-7 B und Section 5-7 bis Proposition 1 in [Car16]

Übung 1.

(i) Es sei C eine ebene Kurve, T die Tangente an C in $p \in C$ und L eine Gerade parallel zur Normalen in p in einem Abstand d von p (siehe unten). Es bezeichne h die Länge des Segments auf L, das durch C und T bestimmt ist (h ist also die „Höhe“ von C relativ zu T). Beweisen Sie, dass

$$|\kappa(p)| = \lim_{d \to 0} \frac{2h}{d}$$

gilt.



(ii) Ist eine geschlossene ebene Kurve C in einer Kreisscheibe vom Radius r enthalten, so zeigen Sie, dass es einen Punkt $p \in C$ derart gibt, dass die Krümmung κ von C in p

$$|\kappa| \geq \frac{1}{r}$$

erfüllt.

Lösung 1.

(i) Ohne Einschränkung sei $p = (0,0)$, T liege auf der x-Achse (d.h. $\alpha'(0) = \big(1,0\big)$) und die Normale von C in p auf der y-Achse. Ferner sei $\alpha = (x,y)$ nach der Bogenlänge parametrisiert und $p = \alpha(0)$.

Betrachte die Taylorentwicklung um 0:

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \frac{1}{2}\alpha''(0)s^2 + R$$

mit $R = (R_x, R_y)$ und $\lim_{s\to 0} \frac{R}{s^2} = 0$. Es sei κ die Krümmung von α bei $s = 0$. Es gilt nach Frenet (und der Wahl der Koordinaten)

$$\alpha''(0) = \kappa \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(bitte wenden)

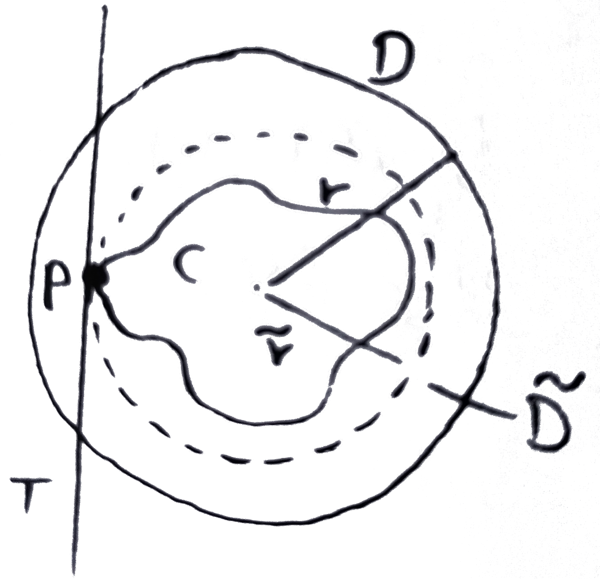


Abbildung 1: Skizze zu Übung 1 (ii)

und damit

$$x(s) = s + R_x, \quad y(s) = \frac{\kappa}{2}s^2 + R_y,$$

Daher gilt

$$|\kappa(p)| = \lim_{s\to 0} \frac{2|y(s)|}{s^2} = \lim_{d\to 0} \frac{2h}{d^2}.$$

(ii) (Vergleiche Abbildung 1) Es sei 0 der Mittelpunkt der Kreisscheibe D. Schrumpfe den Rand von D durch eine Familie konzentrischer Kreise bis er die Kurve C in einem Punkt p trifft. Sei T die gemeinsame Tangente an $\tilde{D}$ und C in p. Wie in (i) sei $p = (0,0)$ und T liege auf der x-Achse, C sei beschrieben durch $\alpha = (x,y)$, $\alpha(0) = p$ und $\tilde{D}$ durch $\tilde{\alpha} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{\alpha}(0) = p$, ohne Einschränkung nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt auf einer kleinen Umgebung um 0

$$\tilde{y}(s) \le y(s)$$

und mit (i) folgt

$$\frac{1}{r} \le \frac{1}{\tilde{r}} = \lim_{s\to 0} \frac{2|\tilde{y}(s)|}{s^2} \le \lim_{s\to 0} \frac{2|y(s)|}{s^2} = |\kappa(p)|.$$

Übung 2.
Sei $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, ebene Kurve, welche nach der Bogenlänge parametrisiert ist und es bezeichne $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die (orientierte) Krümmung dieser Kurve. Zeigen Sie, dass α konvex ist, wenn $\kappa(s) \ge 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ oder $\kappa(s) \le 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösung 2.
Ohne Einschränkung sei $\kappa \ge 0$. Wir nehmen an, dass α nicht konvex ist. Dann gibt es ein $s_0 \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s \mapsto (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0)$$

sowohl negative, als auch positive Werte annimmt. Aufgrund der Periodizität von α nimmt φ das Minimum in einem Punkt $s_1 \in \mathbb{R}$ and und das Maximum in einem Punkt $s_2 \in \mathbb{R}$ an. Folglich gilt

$$\varphi(s_1) < \varphi(s_0) < \varphi(s_2). \tag{1}$$

Da in s_1 ein Extremum vorliegt, gilt $\varphi'(s_1) = 0$. Damit folgt $\alpha'(s_1) \cdot n(s_0) = 0$, sodass $\alpha'(s_1) = \pm\alpha'(s_0)$. Ebenso liegt in s_2 ein Extremum vor, sodass $\alpha'(s_2) = \pm\alpha'(s_0)$ gilt. Damit müssen von

(bitte wenden)

den drei Einheitsvektoren $\alpha'(s_0), \alpha'(s_1), \alpha'(s_2)$ zwei übereinstimmen. Wir wählen also $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \in \{s_0, s_1, s_2\}$ mit $\tilde{s}_1 < \tilde{s}_2$, sodass $\alpha'(\tilde{s}_1) = \alpha'(\tilde{s}_2)$.

Sei nun ϑ eine entsprechende Winkelfunktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $\vartheta' = \kappa$ gilt. Es folgt

$$\vartheta(\tilde{s}_2) - \vartheta(\tilde{s}_1) = 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aus $\vartheta' = \kappa$ folgt, dass ϑ monoton wachsend ist und somit $\vartheta(\tilde{s}_2) - \vartheta(\tilde{s}_1) \geq 0$, sodass $k \in \mathbb{N}_0$. Analog folgt

$$\vartheta(\tilde{s}_1 + L) - \vartheta(\tilde{s}_2) = 2\pi l \quad (l \in \mathbb{N}_0).$$

Für die Umlaufzahl n_α folgt $n_\alpha = k + l \geq 0$. Der Umlaufsatz liefert $n_\alpha = 1$, sodass $k = 0$ oder $l = 0$. Ohne Einschränkung sei $k = 0$. Es folgt $\kappa = \vartheta' = 0$ auf $[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$. Somit parametrisiert α auf $[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$ eine Gerade, d.h. für alle $s \in [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$ gilt

$$\alpha(s) = \alpha(\tilde{s}_1) + (s - \tilde{s}_1)\alpha'(\tilde{s}_1) = \alpha(\tilde{s}_1) \pm (s - \tilde{s}_1)\alpha'(s_0).$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0) = (\alpha(\tilde{s}_1) \mp (s - \tilde{s}_1)\alpha'(s_0) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0) \\ &= (\alpha(\tilde{s}_1) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0) \mp (s - \tilde{s}_1)\alpha'(s_0) \cdot n(s_0) \\ &= (\alpha(\tilde{s}_1) - \alpha(s_0)) \cdot n(s_0),\end{aligned}$$

sodass φ konstant ist. Da aber mindestens zwei der drei Werte s_0, s_1, s_2 im Intervall $[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$ liegen, widerspricht dies Gleichung (1).

Übung 3.

(i) Gibt es eine einfach geschlossene ebene Kurve mit einer Länge von sechs Metern, welche eine Fläche von drei Quadratmetern umschließt? Begründen Sie ihre Antwort!

(ii) Es seien $\overline{AB}$ eine Strecke in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und $l > |\overline{AB}|$. Beweisen Sie, dass eine Kurve der Länge l, welche die Punkte A und B verbindet und zusammen mit der Strecke $\overline{AB}$ den größtmöglichen Flächeninhalt einschließt, ein Kreisbogen von A nach B ist.

Lösung 3.

(i) Nach der isoperimetrischen Ungleichung gilt

$$3m^2 \leq \frac{(6m)^2}{4\pi} = \frac{9}{\pi}m^2 < 3m^2.$$

Also kann es eine solche Kurve nicht geben.

(ii) Betrachten Sie Abbildung 2. Sei $L(\beta) = L(\alpha) = l$. Dann gilt

$$U_{\beta\cup\gamma} = L(\beta \cup \gamma) = L(\beta) + L(\gamma) = l + (2\pi r - L(\alpha)) = l + 2\pi r - l = 2\pi r = L(\alpha \cup \gamma) = U_{\alpha\cup\gamma}$$

und somit folgt mit der isoperimetrischen Ungleichung

$$A_{\beta\cup\gamma} \leq \frac{U^2_{\beta\cup\gamma}}{4\pi} = \frac{U^2_{\alpha\cup\gamma}}{4\pi} = A_{\alpha\cup\gamma}.$$

Also ist α optimal.

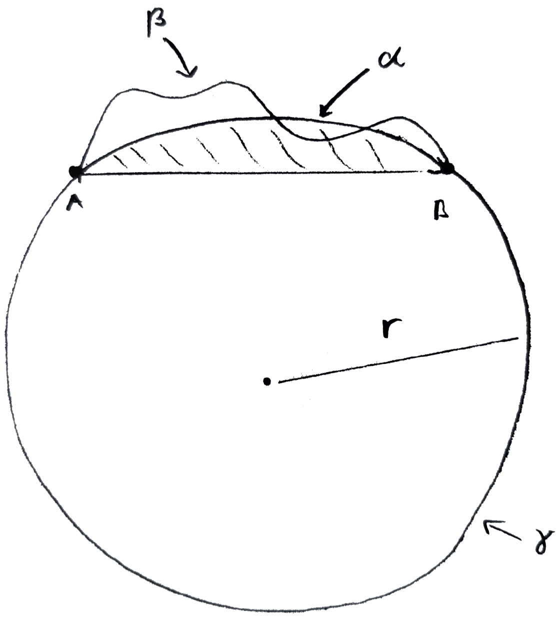


Abbildung 2: Skizze zu Übung 3 (ii)

Übung 4.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung κ und Torsion τ. Es seien $\kappa \neq 0$, $\kappa' \neq 0$ und $\tau \neq 0$ auf ganz I. Die Funktionen κ und τ müssen auf I der Gleichung

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right) = r^2$$

genügen, wobei $r > 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie: α liegt auf einer Sphäre mit Radius r.

(*Hinweis: Betrachten Sie die Kurve*

$$\beta\colon I \to \mathbb{R}^3,\ s \mapsto \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2\tau(s)}b(s)$$

wobei (t, n, b) *das Frenetsche Dreibein von* α *bezeichnet.*)

Lösung 4.
Definiere $K = \frac{1}{\kappa}$ und $T = \frac{1}{\tau}$. Dann gilt

$$K' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2},$$

sodass

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right) = r^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad K^2 + (K'T)^2 = r^2.$$

Differenzieren der rechten Gleichung liefert

$$2KK' + 2(K'T)(K'T)' = \frac{2K'}{\tau}(K\tau + (K'T)') = 0,$$

sodass

$$K\tau + (K'T)' = 0$$

auf ganz I. Weiterhin gilt mit den Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned}\beta' &= \alpha' + K'n + Kn' + (K'T)'b + (K'T)b' \\ &= t + K'n + K(\tau b - \kappa t) + (K'T)'b - K'T\tau n \\ &= (1 - K\kappa)t + (K' - K'T\tau)n + (K\tau + (K'T)')b \\ &= 0,\end{aligned}$$

(bitte wenden)

sodass β konstant ist. Da (t, n, b) (punktweise) eine Orthonormalbasis ist, erhalten wir schließlich mit der Definition von β

$$(\alpha - \beta)^2 = \left(-\frac{1}{\kappa}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\kappa}\right) + \left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right) \cdot \left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right) = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right) = r^2.$$

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.