UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 7 **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 13; Bis S. 56 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und Section 3-1 – S. 143 in [Car16]

Übung 1.

Betrachten Sie für $a, b, c > 0$ die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

(i) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (Ellipsoid),

(ii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (einschaliges Hyperboloid),

(iii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\right\}$ (zweischaliges Hyperboloid),

(iv) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (elliptisches Paraboloid),

(v) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (hyperbolisches Paraboloid).

Skizzieren Sie diese Mengen und stellen Sie möglichst große Teilmengen davon als parametrisierte Fläche dar.

Übung 2.

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, C die Spur einer injektiven, regulären, parametrisierten (ebenen) Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Bild}(\alpha) \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = 0\}$ und $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; z = 0\}$ ein fixierter Punkt. Sei K die Punktmenge, welche dadurch entsteht, dass sich eine durch den Punkt P verlaufende Gerade längs der Kurve C bewegt.

(i) Finden Sie eine Parametrisierung X, deren Spur die Punktmenge K ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung von X. Wann handelt es sich bei X um eine parametriserte Fläche?

(*Hinweis: Hier und in allen folgenden Aufgaben (auch auf den folgenden Blättern) müssen Sie die Injektivität und die Stetigkeit der Inversen nicht nachrechnen!*)

(iii) Sei nun $P = (0, 0, 1)$. Untersuchen Sie die Situation, wenn C die Spur des Kreises $\alpha\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$ ist und fertigen Sie eine Skizze an.

(bitte wenden)

Übung 3.
Sei

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

(i) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung N von X.

(iii) Stellen Sie das Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,1)$ längs X in der Form

$$V = V^1 X_u + V^2 X_v + V^3 N$$

mit Funktionen $V^k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($k \in \{1,2,3\}$) dar.

(iv) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix G der ersten Fundamentalform von X.

Übung 4.
Beschreiben Sie den Teil der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, der durch das Bild der Gauß-Abbildung folgender Flächen überdeckt wird und fertigen Sie jeweils eine Skizze an:

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2-z=0\}$ (Rotationsparaboloid),

(ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2-z^2=1\}$ (Rotationshyperboloid),

(iii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x^2+y^2-\cosh^2(z)=0\}$ (Katenoid).

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie.* 2008.