UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 7, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 13; Bis S. 56 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und Section 3-1 – S. 143 in [Car16]

Übung 1.
Betrachten Sie für $a, b, c > 0$ die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

(i) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (Ellipsoid),

(ii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ (einschaliges Hyperboloid),

(iii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\right\}$ (zweischaliges Hyperboloid),

(iv) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (elliptisches Paraboloid),

(v) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0\right\}$ (hyperbolisches Paraboloid).

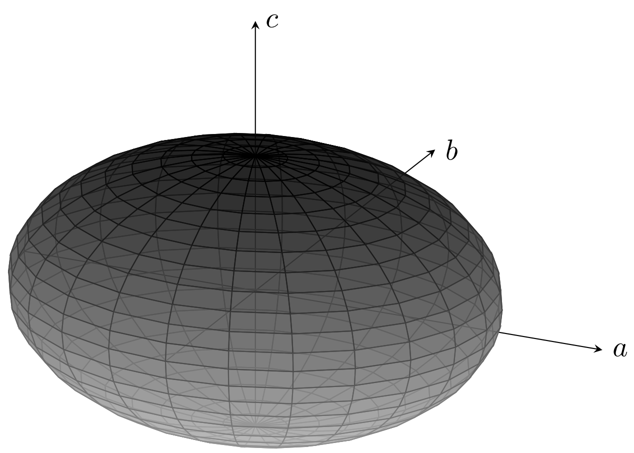
Skizzieren Sie diese Mengen und stellen Sie möglichst große Teilmengen davon als parametrisierte Fläche dar.

Lösung 1.

(i) Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$X\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,$$
$$(\theta, \varphi) \mapsto (a\cos(\theta)\cos(\varphi), b\cos(\theta)\sin(\varphi), c\sin(\theta)).$$

Plot ($a = 2, b = 1, c = 0,5$):

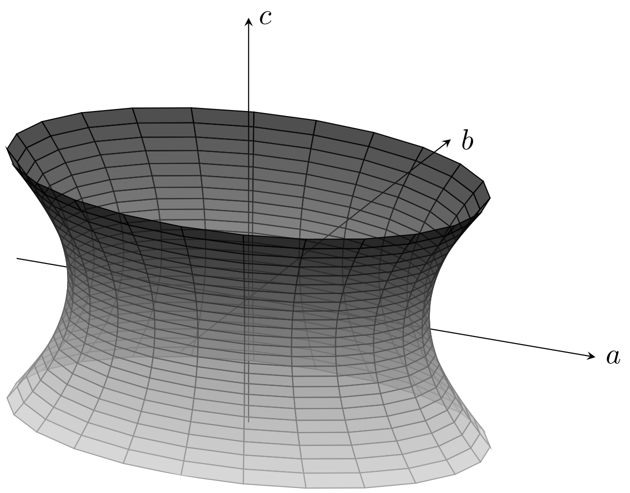


(bitte wenden)

(ii) Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$X\colon \mathbb{R} \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (\theta,\varphi) \mapsto (a\cosh(\theta)\cos(\varphi), b\cosh(\theta)\sin(\varphi), c\sinh(\theta)).$$

Plot ($a = b = c = 1$):



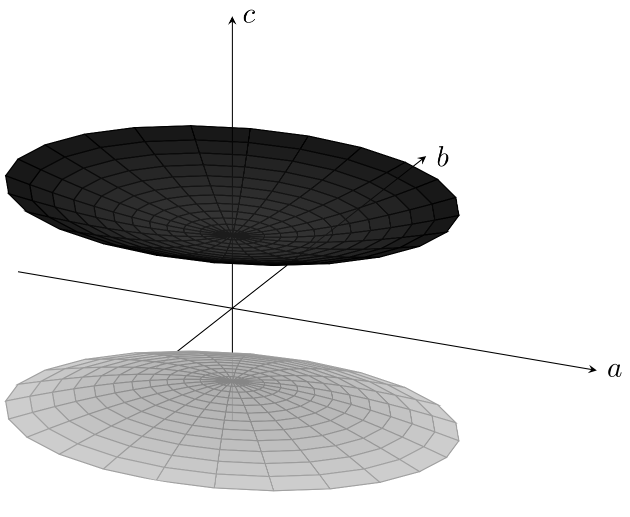
(iii) Eine Parametrisierung der oberen Hälfte ist gegeben durch

$$X\colon \mathbb{R} \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (\theta,\varphi) \mapsto (a\sinh(\theta)\cos(\varphi), b\sinh(\theta)\sin(\varphi), c\cosh(\theta)).$$

Eine Parametrisierung der unteren Hälfte ist gegeben durch

$$X\colon \mathbb{R} \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (\theta,\varphi) \mapsto (a\sinh(\theta)\cos(\varphi), b\sinh(\theta)\sin(\varphi), -c\cosh(\theta)).$$

Plot ($a = 1, b = 2, c = 0,5$):



(iv) Eine Parametrisierung ist gegeben durch

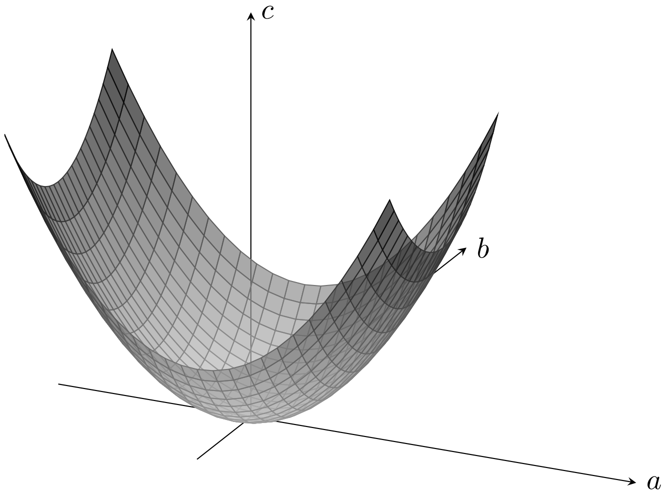
$$X\colon (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi) \mapsto (ar\cos(\varphi), br\sin(\varphi), r^2)$$

oder

$$X\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto \left(x, y, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Plot ($a = 2, b = 3$):

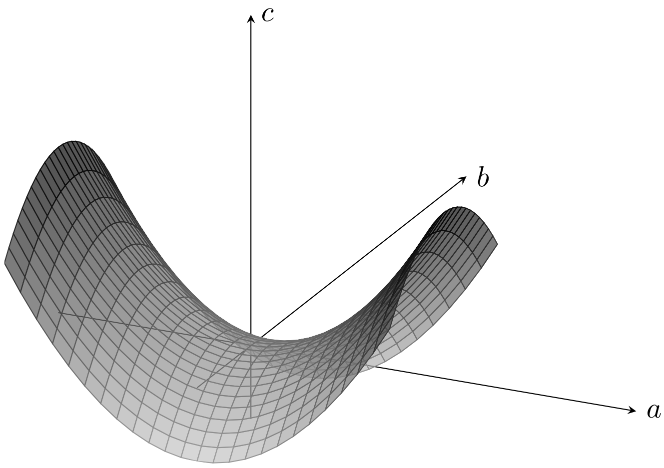
(bitte wenden)



(v) Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$X\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto\left(x,y,\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Plot ($a=2, b=3$):



Übung 2.

Seien $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, C die Spur einer injektiven, regulären, parametrisierten (ebenen) Kurve $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{Bild}(\alpha)\subset\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ z=0\}$ und $P\in\mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ;\ z=0\}$ ein fixierter Punkt. Sei K die Punktmenge, welche dadurch entsteht, dass sich eine durch den Punkt P verlaufende Gerade längs der Kurve C bewegt.

(i) Finden Sie eine Parametrisierung X, deren Spur die Punktmenge K ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung von X. Wann handelt es sich bei X um eine parametriserte Fläche?

(*Hinweis: Hier und in allen folgenden Aufgaben (auch auf den folgenden Blättern) müssen Sie die Injektivität und die Stetigkeit der Inversen nicht nachrechnen!*)

(iii) Sei nun $P=(0,0,1)$. Untersuchen Sie die Situation, wenn C die Spur des Kreises $\alpha\colon[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto(\cos(t),\sin(t),0)$ ist und fertigen Sie eine Skizze an.

(bitte wenden)

Lösung 2.

(i) Definiere

$$X \colon I^\circ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto P + v(\alpha(u) - P).$$

(ii) Sei $(u, v) \in I^\circ \times \mathbb{R}$. Es gilt

$$\partial_1 X(u, v) = v\alpha'(u) \quad \text{und} \quad \partial_2 X(u, v) = \alpha(u) - P,$$

sodass

$$(\partial_1 X \times \partial_2 X)(u, v) = v(\alpha'(u) \times (\alpha(u) - P)).$$

Damit ist X genau dann eine parametrisierte Fläche, wenn $v \neq 0$, da $\alpha'(u) \not\parallel \alpha(u) - P$ für alle $u \in I^\circ$ gilt. Die Gauß-Abbildung lautet also

$$N \colon I^\circ \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to S^2,\ (u, v) \mapsto \frac{1}{|v(\alpha'(u) \times (\alpha(u) - P))|} v(\alpha'(u) \times (\alpha(u) - P)).$$

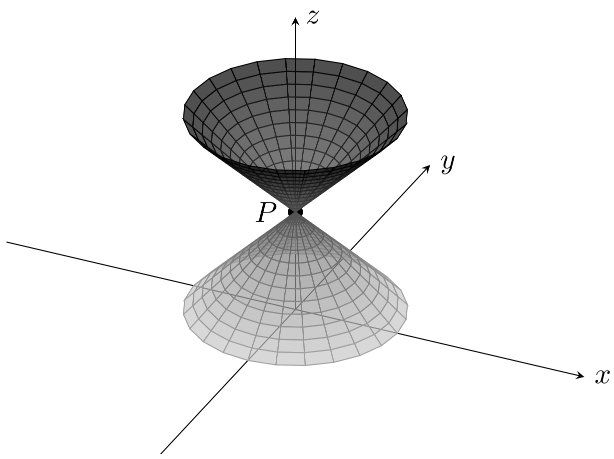
(iii) Es gilt

$$X(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), 1 - v)$$

für alle $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und

$$N(u, v) = (-\cos(u), \sin(u), -\cos(u)^2 + \sin(u)^2)$$

für alle $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Es handelt sich um einen Doppelkegel mit Spitze in P.



Übung 3.

Sei

$$X \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

(i) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gauß-Abbildung N von X.

(iii) Stellen Sie das Vektorfeld $V \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto (u, v, 1)$ längs X in der Form

$$V = V^1 \partial_1 X + V^2 \partial_2 X + V^3 N$$

mit Funktionen $V^k \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($k \in \{1, 2, 3\}$) dar.

(iv) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix G der ersten Fundamentalform von X.

(bitte wenden)

Lösung 3.
Seien $u, v \in \mathbb{R}$.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\partial_1 X(u,v) &= \frac{-2u}{(u^2+v^2+1)^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1) + \frac{2}{u^2+v^2+1}(1,0,u)\\ &= \frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}(-u^2+v^2+1, -2uv, 2u)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_2 X(u,v) &= \frac{-2v}{(u^2+v^2+1)^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1) + \frac{2}{u^2+v^2+1}(0,1,v)\\ &= \frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}(-2uv, u^2-v^2+1, 2v),\end{aligned}$$

sodass

$$\langle \partial_1 X(u,v), \partial_2 X(u,v)\rangle = 0$$

und

$$|\partial_1 X(u,v)| = \frac{2}{u^2+v^2+1} = |\partial_2 X(u,v)|.$$

Wir erhalten damit

$$\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v) = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^3}(-2u, -2v, 1-u^2-v^2)$$

und

$$|\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v)| = |\partial_1 X(u,v)||\partial_2 X(u,v)| = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} > 0.$$

(ii) Mit (i) erhalten wir

$$N(u,v) = \frac{1}{|\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v)|}\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}(-2u, -2v, 1-u^2-v^2).$$

(iii) Die Teile (i) und (ii) zeigen, dass $\left(\frac{u^2+v^2+1}{2}\partial_1 X(u,v), \frac{u^2+v^2+1}{2}\partial_2 X(u,v), N(u,v)\right)$ eine Orthonormalbasis ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}V^1(u,v) &= \frac{1}{|\partial_1 X(u,v)|}\left\langle V(u,v), \frac{1}{|\partial_1 X(u,v)|}\partial_1 X(u,v)\right\rangle = \frac{-u}{2}(u^2+v^2-3),\\ V^2(u,v) &= \frac{1}{|\partial_2 X(u,v)|}\left\langle V(u,v), \frac{1}{|\partial_2 X(u,v)|}\partial_2 X(u,v)\right\rangle = \frac{-v}{2}(u^2+v^2-3),\\ V^3(u,v) &= \langle V(u,v), N(u,v)\rangle = \frac{1-3(u^2+v^2)}{u^2+v^2+1}.\end{aligned}$$

(iv) Die Fundamentalmatrix in (u,v) lautet

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}\end{pmatrix} = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Übung 4.
Beschreiben Sie den Teil der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, der durch das Bild der Gauß-Abbildung folgender Flächen überdeckt wird und fertigen Sie jeweils eine Skizze an:

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 - z = 0\}$ (Rotationsparaboloid),

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ (Rotationshyperboloid),

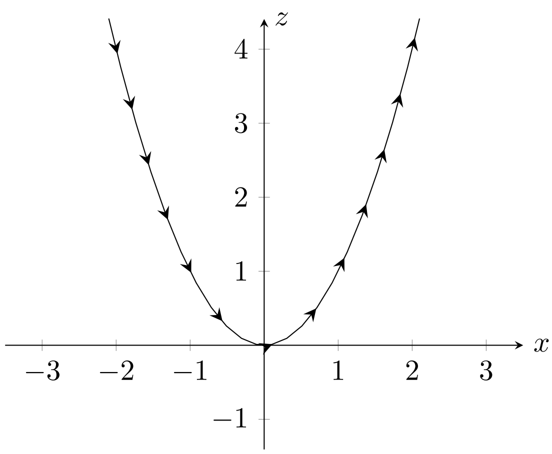
(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x^2 + y^2 - \cosh^2(z) = 0\}$ (Katenoid).

Lösung 4.
Alle Flächen sind rotationssymmetrisch zur z-Achse. Definiere für $\varphi \in (0, 2\pi)$ die Rotationsmatrix

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Definiere

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; t \mapsto (t, 0, t^2).$$



Dann ist

$$X \colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; (u, v) \mapsto R(u)\alpha(v) = (v\cos(u), v\sin(u), v^2).$$

eine Parametrisierung der Menge (vgl. S. 50 in [Fuc08]) und

$$\begin{aligned} N \colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; (u, v) \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1+4v^2}}(2v\cos(u), 2v\sin(u), -1) \\ = & R(u)\frac{1}{\sqrt{1+4v^2}}(2v, 0, -1). \end{aligned}$$

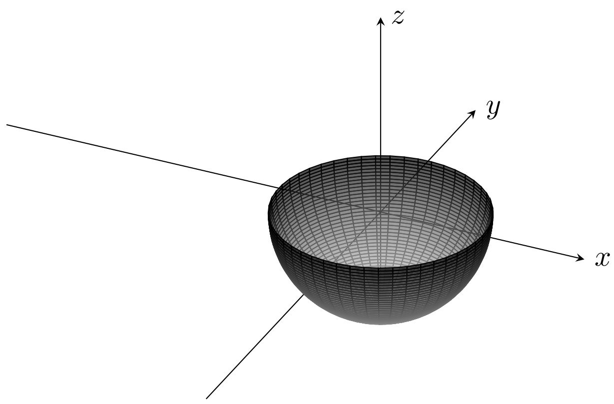
Da

$$\lim_{v \to \infty} \frac{2v}{\sqrt{1+4v^2}} = 1,$$

überdeckt das Bild der Gauß-Abbildung die Menge

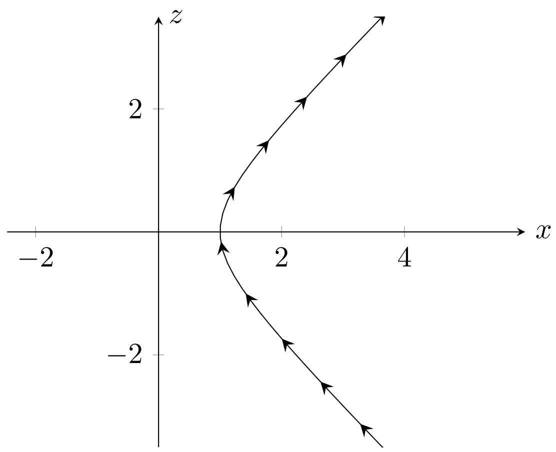
$$\left\{ (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta)) \; ; \; \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \varphi \in (0, 2\pi) \right\}.$$

Plot:



(ii) Definiere

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(\sqrt{t^2+1}, 0, t\right).$$



Dann ist

$$X\colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto R(u)\alpha(v)$$

eine Parametrisierung der Menge (vgl. S. 50 in [Fuc08]) und

$$N\colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto R(u)\frac{\sqrt{v^2+1}}{\sqrt{2v^2+1}}\left(1, 0, -\frac{v}{\sqrt{v^2+1}}\right).$$

Da

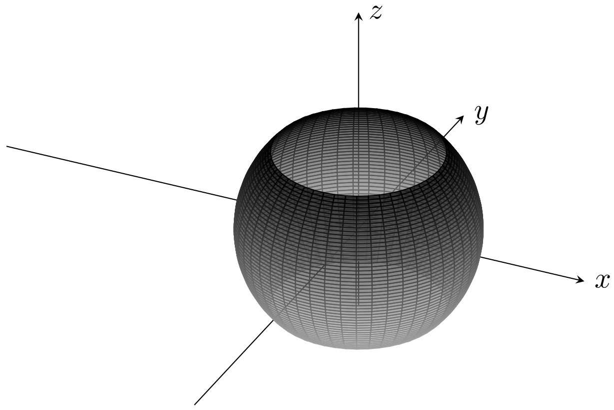
$$\lim_{v\to\infty} \frac{\sqrt{v^2+1}}{\sqrt{2v^2+1}} = \lim_{v\to\infty} \frac{v}{\sqrt{2v^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

überdeckt das Bild der Gauß-Abbildung die Menge

$$\left\{(\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))\ ;\ \theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right), \varphi \in (0, 2\pi)\right\}.$$

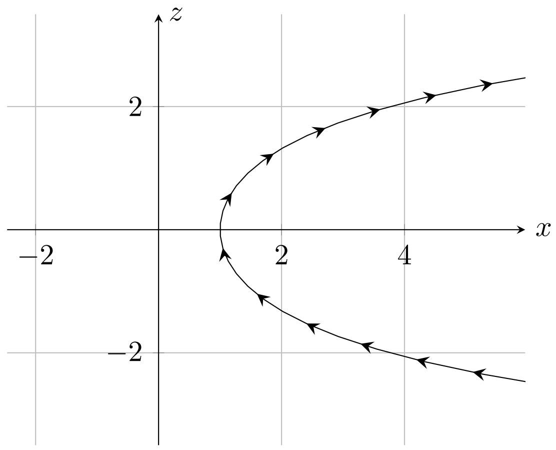
Plot:

(bitte wenden)



(iii) Definiere

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cosh(t), 0, t).$$



Dann ist

$$X\colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto R(u)\alpha(v)$$

eine Parametrisierung der Menge (vgl. S. 50 in [Fuc08]) und

$$N\colon (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto R(u)\frac{1}{\cosh(v)}\,(1, 0, -\sinh(v))\,.$$

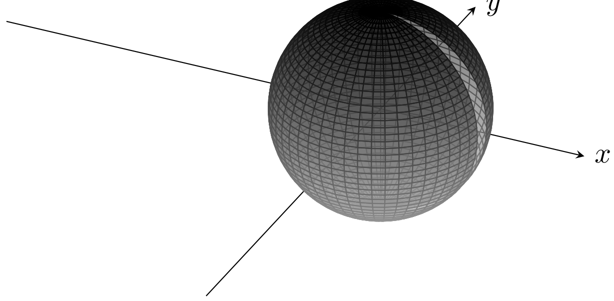
Da

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)} = 1,$$

überdeckt das Bild der Gauß-Abbildung die Menge

$$\overline{B}_1(0) \setminus \{(\sin(\theta), 0, \cos(\theta))\ ;\ \theta \in [0, \pi]\}.$$

Plot (mit überzeichnetem Schlitz):



(bitte wenden)

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.