



Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 8

Abgabetermin: /

Materialien: Bis Lektion 14; Bis S. 60 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und
Section 3-1 – S. 143 in [Car16]

Übung 1.

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X die Rotationsfläche einer regulären ebenen Kurve $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$ um die x -Achse. Zeigen Sie, dass es stets eine Parametrisierung $X: (0, 2\pi) \times I^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, sodass

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(u, v) \in (0, 2\pi) \times I^\circ$.

Übung 2.

Betrachten Sie die Abbildung

$$X: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto ((a + b \sin(v)) \sin(u), (a - b \cos(v)) \sin(u), c \sin(u)),$$

wobei a, b, c reelle Zahlen sind.

- (i) Untersuchen Sie, wann durch X eine reguläre parametrisierte Fläche erklärt wird.
- (ii) Bestimmen Sie (im Falle der Regularität) die erste Fundamentalform von X .

Übung 3.

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, doppelpunktfreie (d.h. α ist injektiv) Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Für ein $r > 0$ sei

$$X: I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \alpha(u) + r(\cos(v)n(u) + \sin(v)b(u)),$$

wobei n und b die Normale bzw. Binormale der Leitkurve α bezeichnen. Eine solche Fläche wird *Röhrenfläche* genannt.

- (i) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von X . Unter welchen Voraussetzungen ist X eine reguläre parametrisierte Fläche?
- (ii) Bestimmen Sie die zu X gehörige Gauß-Abbildung unter der Voraussetzung, dass X regulär ist.
- (iii) Bestimmen Sie X , wenn die Leitkurve der Kreis $\alpha: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$ und $r = \frac{1}{2}$ ist. Skizzieren Sie diese Fläche.

(bitte wenden)

Übung 4.

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\varphi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen der zweiten Fundamentalform II (bzw. II^{TX}) von X und der zweiten Fundamentalform \tilde{II} (bzw. $II^{T\tilde{X}}$) der umparametrisierten Fläche $\tilde{X} = X \circ \varphi$.

(i) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und alle $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\tilde{II}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) = II_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{V}).$$

(ii) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und alle $U, V \in T_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{X}$ ist

$$II_{(\tilde{u}, \tilde{v})}^{T\tilde{X}}(U, V) = II_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}^{TX}(U, V).$$

Literatur

- [Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.
- [Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.