



Übungen zur Vorlesung  
Differentialgeometrie  
Sommersemester 2020

Blatt 8

Abgabetermin: /

Materialien: Bis Lektion 14; Bis S. 60 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und  
Section 3-1 – S. 143 in [Car16]

**Übung 1.**

Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $X$  die Rotationsfläche einer regulären ebenen Kurve  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t), 0)$  um die  $x$ -Achse. Zeigen Sie, dass es stets eine Parametrisierung  $X: (0, 2\pi) \times I^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt, sodass

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times I^\circ$ .

**Übung 2.**

Betrachten Sie die Abbildung

$$X: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto ((a + b \sin(v)) \sin(u), (a - b \cos(v)) \sin(u), c \sin(u)),$$

wobei  $a, b, c$  reelle Zahlen sind.

- (i) Untersuchen Sie, wann durch  $X$  eine reguläre parametrisierte Fläche erklärt wird.
- (ii) Bestimmen Sie (im Falle der Regularität) die erste Fundamentalform von  $X$ .

**Übung 3.**

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, doppelpunktfreie (d.h.  $\alpha$  ist injektiv) Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Für ein  $r > 0$  sei

$$X: I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \alpha(u) + r(\cos(v)n(u) + \sin(v)b(u)),$$

wobei  $n$  und  $b$  die Normale bzw. Binormale der Leitkurve  $\alpha$  bezeichnen. Eine solche Fläche wird *Röhrenfläche* genannt.

- (i) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von  $X$ . Unter welchen Voraussetzungen ist  $X$  eine reguläre parametrisierte Fläche?
- (ii) Bestimmen Sie die zu  $X$  gehörige Gauß-Abbildung unter der Voraussetzung, dass  $X$  regulär ist.
- (iii) Bestimmen Sie  $X$ , wenn die Leitkurve der Kreis  $\alpha: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$  und  $r = \frac{1}{2}$  ist. Skizzieren Sie diese Fläche.

(bitte wenden)

#### Übung 4.

Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine parametrisierte Fläche und  $\varphi: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen der zweiten Fundamentalform  $II$  (bzw.  $II^{TX}$ ) von  $X$  und der zweiten Fundamentalform  $\tilde{II}$  (bzw.  $II^{T\tilde{X}}$ ) der umparametrisierten Fläche  $\tilde{X} = X \circ \varphi$ .

(i) Für alle  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$  und alle  $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$  ist

$$\tilde{II}_{(\tilde{u}, \tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) = II_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{V}).$$

(ii) Für alle  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$  und alle  $U, V \in T_{(\tilde{u}, \tilde{v})}\tilde{X}$  ist

$$II_{(\tilde{u}, \tilde{v})}^{T\tilde{X}}(U, V) = II_{\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})}^{TX}(U, V).$$

#### Literatur

- [Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces*. Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.
- [Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie*. 2008.