UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie
Sommersemester 2020

Blatt 8, Lösung **Abgabetermin:** /

Materialien: Bis Lektion 14; Bis S. 60 in [Fuc08]; Sections 2-1 – 2-5 und Section 3-1 – S. 143 in [Car16]

Übung 1.
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X die Rotationsfläche einer regulären ebenen Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (x(t), y(t), 0)$ um die x-Achse. Zeigen Sie, dass es stets eine Parametrisierung $X\colon (0, 2\pi) \times I^\circ \to \mathbb{R}^3$ gibt, sodass

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(u, v) \in (0, 2\pi) \times I^\circ$.

Lösung 1.
Da die Rotationsfläche unabhängig von der Parametrisierung der Kurve ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass α nach Bogenlänge parametrisiert ist. Die Rotationsfläche kann durch

$$X\colon (0, 2\pi) \times I^\circ \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto (x(v), \cos(u)y(v), \sin(u)y(v))$$

parametrisiert werden. Da

$$\partial_1 X(u, v) = (0, -\sin(u)y(v), \cos(u)y(v)) \quad \text{und} \quad \partial_2 X(u, v) = (x'(v), \cos(u)y'(v), \sin(u)y'(v))$$

für alle $(u, v) \in (0, 2\pi) \times I^\circ$ gilt, folgt

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} y(v)^2 & 0 \\ 0 & (x'(v))^2 + (y'(v))^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(v)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(u, v) \in (0, 2\pi) \times I^\circ$.

Übung 2.
Betrachten Sie die Abbildung

$$X\colon \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto ((a + b\sin(v))\sin(u), (a - b\cos(v))\sin(u), c\sin(u)),$$

wobei a, b, c reelle Zahlen sind.

(i) Untersuchen Sie, wann durch X eine reguläre parametrisierte Fläche erklärt wird.

(ii) Bestimmen Sie (im Falle der Regularität) die erste Fundamentalform von X.

(bitte wenden)

Lösung 2.
Es gilt

$$\partial_1 X(u,v) = \cos(u)(a + b\sin(v), a - b\cos(v), c) \quad \text{und} \quad \partial_2 X(u,v) = b\sin(u)(\cos(v), \sin(v), 0)$$

für alle $(u,v) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\partial_1 X(u,v)|^2 &= \cos(u)^2 \left(\left(\sqrt{2}a + b\sin\left(v - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + b^2 \sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)^2 + c^2 \right), \\
|\partial_2 X(u,v)|^2 &= b^2 \sin(u)^2, \\
\langle \partial_1 X(u,v), \partial_2 X(u,v) \rangle &= ab\sin(u)\cos(u)(\cos(v) + \sin(v)), \\
\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v) &= b\sin(u)\cos(u) \begin{pmatrix} -c\sin(v) \\ c\cos(v) \\ a(\sin(v) - \cos(v)) + b\sin(v)(\sin(v) + \cos(v)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $(u,v) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Da $\sin(t) \neq 0 \neq \cos(t)$ und $\sin(v) + \cos(v) > 0$ für alle $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt, ist X (lokal) regulär, wenn $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Weiterhin gilt

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)^2 \left(\left(\sqrt{2}a + b\sin\left(v - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + b^2\sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right)^2 + c^2 \right) & ab\sin(u)\cos(u)(\cos(v) + \sin(v)) \\ ab\sin(u)\cos(u)(\cos(v) + \sin(v)) & b^2\sin(u)^2 \end{pmatrix}.$$

Übung 3.
Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte, doppelpunktfreie (d.h. α ist injektiv) Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Für ein $r > 0$ sei

$$X\colon I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \; (u,v) \mapsto \alpha(u) + r(\cos(v)n(u) + \sin(v)b(u)),$$

wobei n und b die Normale bzw. Binormale der *Leitkurve* α bezeichnen. Eine solche Fläche wird *Röhrenfläche* genannt.

(i) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von X. Unter welchen Voraussetzungen ist X eine reguläre parametrisierte Fläche?

(ii) Bestimmen Sie die zu X gehörige Gauß-Abbildung unter der Voraussetzung, dass X regulär ist.

(iii) Bestimmen Sie X, wenn die Leitkurve der Kreis $\alpha\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \; t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$ und $r = \frac{1}{2}$ ist. Skizzieren Sie diese Fläche.

Lösung 3.
Sei $(u,v) \in I \times (0, 2\pi)$.

(i) Es gilt

$$\partial_1 X(u,v) = (1 - r\cos(v)\kappa(u))t(u) + r\sin(v)\tau(u)n(u) - r\cos(v)\tau(u)b(u)$$

und

$$\partial_2 X(u,v) = -r\sin(v)n(u) + r\cos(v)b(u)$$

sodass

$$|\partial_1 X(u,v)|^2 = (1 - r\cos(v)\kappa(u))^2 + r^2\tau(u)^2$$

und

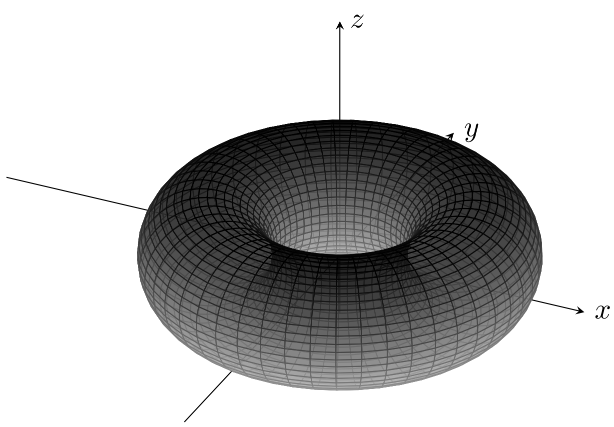
$$|\partial_2 X(u,v)|^2 = r^2$$

(bitte wenden)

sowie
$$\langle \partial_1 X(u,v), \partial_2 X(u,v)\rangle = -r^2\tau(u).$$
Hiermit folgt
$$\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v) = -r\cos(v)(1-r\cos(v)\kappa(u))n(u) - r\sin(v)(1-r\cos(v)\kappa(u))b(u)$$
und
$$|\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v)|^2 = r^2(1-r\cos(v)\kappa(u))^2.$$
Wir erhalten damit
$$\partial_1 X(u,v) \times \partial_2 X(u,v) = 0 \iff \cos(v) = \frac{1}{r\kappa(u)}.$$
Also ist X regulär, wenn $\kappa \leq \frac{1}{r}$, da $\cos(v) < 1$.

(ii) Mit (i) erhalten wir
$$N\colon I \times (0,2\pi) \to S^2,\ (u,v) \mapsto -\cos(v)n(u) - \sin(v)b(u).$$

(iii) Es gilt
$$\begin{aligned} t(u) &= (-\sin(u), \cos(u), 0),\\ n(u) &= (-\cos(u), -\sin(u), 0) = -\alpha(u),\\ b(u) &= t(u) \times n(u) = (0,0,1),\\ \kappa(u) &= 1,\\ \tau(u) &= 0. \end{aligned}$$
Damit folgt
$$X(u,v) = \left(\cos(u)\left(1-\frac{1}{2}\cos(v)\right), \sin(u)\left(1-\frac{1}{2}\cos(v)\right), \frac{1}{2}\sin(v)\right).$$
Plot:



Übung 4.
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche und $\varphi\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation. Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen der zweiten Fundamentalform II (bzw. II^{TX}) von X und der zweiten Fundamentalform $\widetilde{II}$ (bzw. $II^{T\tilde{X}}$) der umparametrisierten Fläche $\tilde{X} = X \circ \varphi$.

(i) Für alle $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und alle $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$ ist
$$\widetilde{II}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U},\tilde{V}) = II_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{U}, D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{V}).$$

(bitte wenden)

(ii) Für alle $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und alle $U, V \in T_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{X}$ ist

$$II^{T\tilde{X}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V) = II^{TX}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V).$$

Lösung 4.

(i) Seien $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbb{R}^2$. Da φ orientierungserhaltend ist, gilt $\tilde{N} = N \circ \varphi$ und damit

$$\begin{aligned}
\widetilde{II}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}, \tilde{V}) &= -D\tilde{N}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) D\tilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}) \\
&= -D(N \circ \varphi)_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) D(X \circ \varphi)_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}) \\
&= -DN_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{U}) DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}(\tilde{V}) \\
&= II_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{U}, D\varphi(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{V}).
\end{aligned}$$

(ii) Seien $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$ und $U, V \in T_{(\tilde{u},\tilde{v})}\tilde{X}$. Da φ orientierungserhaltend ist, gilt $\tilde{N} = N \circ \varphi$ und damit

$$\begin{aligned}
II^{T\tilde{X}}_{(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V) &= -D\tilde{N}_{(\tilde{u},\tilde{v})}((D\tilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})})^{-1}U)V \\
&= -D(N \circ \varphi)_{(\tilde{u},\tilde{v})}((D(X \circ \varphi)_{(\tilde{u},\tilde{v})})^{-1}U)V \\
&= -DN_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}((DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})})^{-1}U)V \\
&= -DN_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})}(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})})^{-1}((DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})})^{-1}U)V \\
&= -DN_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}((DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})})^{-1}U)V \\
&= II^{TX}_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}(U, V).
\end{aligned}$$

Literatur

[Car16] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves & surfaces.* Revised & updated second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016.

[Fuc08] Martin Fuchs. *Vorlesungsskript zur Differentialgeometrie.* 2008.